Depto. De Engenharia Mecânica
CTG - UFPE

Cinemática de Corpos Rígidos

José Maria Bezerra

Apostila para a Cadeira

Mecanismos

Uma Introdução

1. Sistemas de Referência

a. Sistema Inercial → O referencial é sempre fixo em relação ao observador;

b. Sistema Local → O referencial se movimenta em relação ao observador.

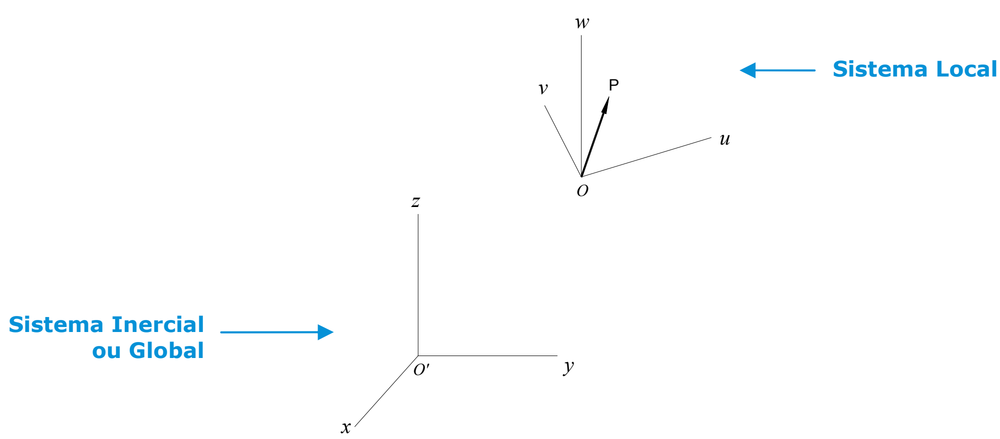

Figura 1 - Sistemas Inercial e Local

OBS:

- Um ponto P terá coordenadas (x, y, z) no sistema inercial e coordenadas (u, v, w) no sistema local;
- Adotaremos, por convenção, que o sistema Global terá origem O' e **i**, **j**, **k** para versores da base e que o sistema Local terá origem O e $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ para versores da base;
- Para que possamos efetuar operações entre vetores, através de suas coordenadas (somas, produtos vetoriais, etc.), estas coordenadas têm que estar no mesmo sistema.

1.1 Mudança de Base

Conhecidas as coordenadas globais dos versores do sistema local:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\\ \vec{e}_2 &= x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\\ \vec{e}_3 &= x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}\end{aligned} \qquad (1)$$

Estas equações podem ser escritas na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{Bmatrix} \qquad (2)$$

Ou ainda:

$$\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$$

Onde a matriz:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

é chamada "matriz da transformação de base".

OBS:

É importante ressaltar que a matriz **M** será sempre a matriz que permitirá a obtenção dos versores da base local em função da global.

1.2 Matrizes da Transformação

Para determinação da matriz **M** que permite a obtenção das coordenadas dos versores do sistema local no sistema global, teremos três casos possíveis:

a. Sistema local tendo os três eixos paralelos respectivamente ao sistema global;
b. Sistema local rotacionado de um determinado ângulo, sendo o eixo de rotação coincidente com um dos eixos do sistema global;
c. Sistema local obtido a partir de três rotações consecutivas em torno dos três eixos do sistema global respectivamente.

Sistema Local Paralelo ao Sistema Global

Neste caso os versores do sistema local coincidem com os versores do sistema global.

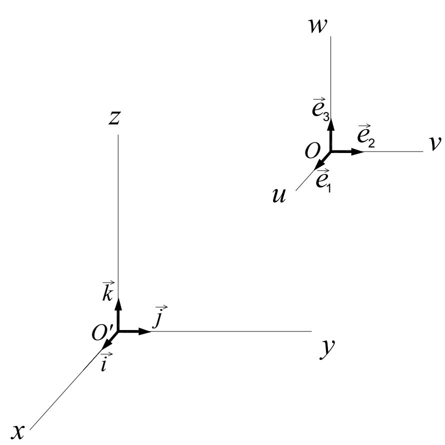

Figura 2 - Sistemas Paralelos

É fácil ver que:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \\ \vec{e}_2 &= 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k} \\ \vec{e}_3 &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k} \end{aligned} \iff \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}$$

Ou seja, a matriz da transformação é a Matriz identidade:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} \quad (4)$$

Como também:

$$\mathbf{M}^{\mathbf{T}} = \mathbf{I} \quad (5)$$

Sistema Local com uma rotação, em relação ao um eixo do Sistema Global

Vamos considerar, inicialmente, o eixo ***w*** do sistema local coincidente com o eixo ***z*** do sistema global e que o sistema local rotacionou de um ângulo $\boldsymbol{\theta}$ em relação ao eixo ***z***.

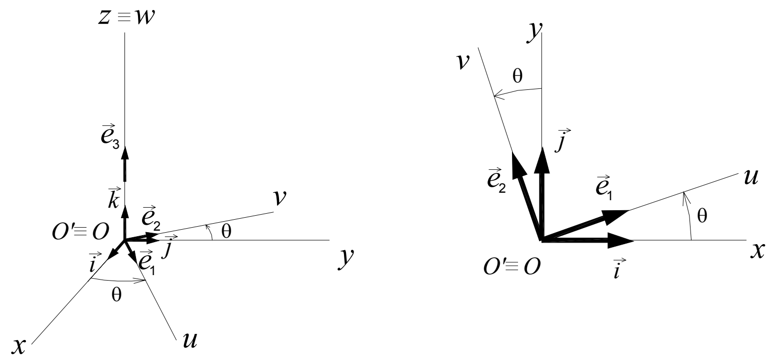

Figura 3 - Sistema Local com deslocamento e rotação

A Figura 3b mostra uma vista de cima dos dois sistemas. Por ela podemos obter:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= (\cos\theta)\vec{i} + (\text{sen}\,\theta)\vec{j} + 0\vec{k}\\ \vec{e}_2 &= (-\text{sen}\,\theta)\vec{i} + (\cos\theta)\vec{j} + 0\vec{k}\\ \vec{e}_3 &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0\\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{Bmatrix} \qquad (6)$$

Conseqüentemente a matriz da transformação será:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}\cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0\\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{M}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0\\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Fica a cargo do aluno verificar que, se as rotações forem φ em torno do eixo ***y*** e γ em torno do eixo ***x***, as matrizes para as transformações serão:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix}\cos\varphi & 0 & \text{sen}\,\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -\text{sen}\,\varphi & 0 & \cos\varphi\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{M}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & \text{sen}\,\gamma\\ 0 & -\text{sen}\,\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}$$

respectivamente.

Sistema Local com três rotações, em relação aos três eixos do Sistema Global

A matriz final vai depender da ordem das rotações, considerando a primeira rotação em torno de ***z***, a segunda em torno de ***y*** e a terceira em torno de ***x***, teríamos:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{M}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{z}})$$

1.3 Mudança de Coordenadas

O problema agora consiste em se obter as coordenadas globais de um vetor **r** (ou de um ponto *P*), sendo conhecidas as suas coordenadas no sistema local, ou seja:

$\vec{r} = (u, v, w)$ no sistema local e desejamos conhecer as coordenadas (x, y, z) de $\vec{r}$ no sistema global.

Então o vetor **r** pode ser escrito de duas formas:

$$\vec{r} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{e}_3 = \begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix}u\\ v\\ w\end{Bmatrix} \qquad (7)$$

Onde as coordenadas de **r** estão no sistema local, e:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix} \qquad (8)$$

Com as coordenadas de **r** no sistema global.

Desenvolvendo-se a expressão 7, teremos:

$$\vec{r} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{e}_3 = \begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}u\\v\\w\end{Bmatrix} = \left(\mathbf{M}\cdot\begin{Bmatrix}\vec{i}\\\vec{j}\\\vec{k}\end{Bmatrix}\right)^{\mathbf{T}}\cdot\begin{Bmatrix}u\\v\\w\end{Bmatrix} = (\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{bmatrix}\cdot\mathbf{M}^{\mathbf{T}})\cdot\begin{Bmatrix}u\\v\\w\end{Bmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{bmatrix}\cdot\left(\mathbf{M}^{\mathbf{T}}\cdot\begin{Bmatrix}u\\v\\w\end{Bmatrix}\right) \tag{9}$$

Comparando-se, agora a equação 9 com a equação 8, concluímos que:

$$\begin{Bmatrix}x\\y\\x\end{Bmatrix} = \mathbf{M}^{\mathbf{T}}\cdot\begin{Bmatrix}u\\v\\w\end{Bmatrix} \tag{10}$$

Onde **M** é a matriz da transformação de base.

2 Cinemática do Ponto

Em nossos estudos, vamos considerar sempre que o ponto P (vetor **r**) tem coordenadas, e portanto trajetória conhecida em função do sistema local e também que o sistema local terá movimento determinado relativamente ao sistema global.

Utilizaremos ainda os índices G e L colocados à direita inferior do vetor, para indicar que o vetor tem coordenadas conhecidas no sistema global ou local respectivamente.

Assim:

$\mathbf{v}_G$ → indica o vetor **v** em coordenadas globais;

$\mathbf{v}_L$ → indica o vetor **v** em coordenadas locais.

E, é claro, se formos efetuar alguma operação vetorial com a utilização direta das coordenadas dos vetores, todos os vetores envolvidos na operação têm que estar em um mesmo sistema, seja ele o global (utilizado preferencialmente) ou o local.

OBS:

Vamos considerar aqui que a não indicação do índice deixará implícito que o vetor se encontra no sistema global, assim:

v → também indica o vetor **v** em coordenadas globais;

2.1 Sistema Local em Translação Curvilínea

Neste caso os eixos do sistema local permanecem paralelos aos eixos do sistema global, variando apenas a sua origem O.

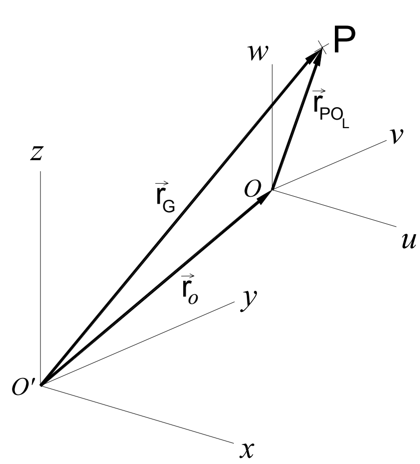

Figura 4 - Ponto *P* no Sistema Local que tem Translação Curvilínea.

Deslocamento

Já vimos que, para este caso, a matriz da transformação é a identidade e o vetor $\vec{r}_{PO_L}$ pode ser posto em coordenadas globais a partir da transformação:

$$\vec{r}_{PO_G} = \mathbf{M}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{r}_{PO_L} = \mathbf{I} \cdot \vec{r}_{PO_L} = \vec{r}_{PO_L}$$

Obtemos assim, para deslocamento, a expressão vetorial:

$$\vec{r}_G = \vec{r}_{o_G} + \mathbf{I} \cdot \vec{r}_{PO_L}$$

Ou, de forma simplificada:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{r}_{PO} \qquad (11)$$

Velocidade

A velocidade pode ser obtida pela diferenciação direta do vetor **r** em relação ao tempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_o + \vec{v}_{PO} \qquad (12)$$

Onde:

$\vec{v}_o$ → é o vetor velocidade para a origem do sistema local

$\vec{v}_{PO}$ → representa o vetor velocidade do ponto *P* em relação ao ponto *O*.

Aceleração

Seguindo mesmo raciocínio teremos para o vetor aceleração:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_o + \vec{a}_{PO} \qquad (13)$$

Sendo aqui também:

$\vec{a}_o$ → o vetor aceleração para a origem do sistema local

$\vec{a}_{PO}$ → o vetor aceleração do ponto *P* em relação ao ponto *O*.

2.2 Sistema Local em Translação e com Rotação em torno do eixo Z

Agora, o ponto O, origem do sistema local, descreverá uma curva qualquer no espaço e o sistema vai girar em torno do eixo local ***w*** que é sempre paralelo ao eixo global ***z***.

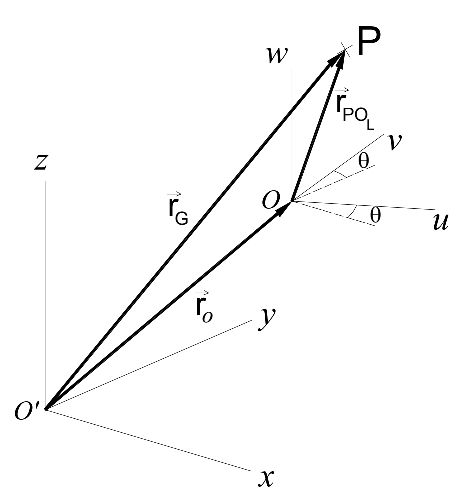

Figura 5 - Ponto *P* no Sistema Local com Translação da origem e rotação vertical.

Neste caso, o sistema local tem o vetor velocidade angular dado por:

$$\vec{\omega} = \frac{d}{dt}\vec{\theta} = \dot{\theta}\vec{k} \tag{14}$$

E para vetor aceleração angular:

$$\vec{\alpha} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{\theta} = \ddot{\theta}\vec{k} \tag{15}$$

Também como já vimos, no item 2, equação 6, a matriz da transformação tem a forma:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deslocamento

E a expressão vetorial para o deslocamento será:

$$\vec{r}_G = \vec{r}_{o_G} + \mathbf{M}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{r}_{PO_L}$$

Que, de forma simplificada fica:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{r}_{PO} \tag{16}$$

Velocidade

Neste caso, a diferenciação do vetor **r** em relação ao tempo vai fornecer:

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{o_G} + \mathbf{M}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{r}_{PO_L}) = \frac{d}{dt}\vec{r}_{o_G} + (\frac{d}{dt}\mathbf{M}^{\mathbf{T}}) \cdot \vec{r}_{PO_L} + \mathbf{M}^{\mathbf{T}} \cdot (\frac{d}{dt}\vec{r}_{PO_L})$$

$$\vec{v}_G = \vec{v}_{o_G} + (\frac{d}{dt}\mathbf{M}^{\mathbf{T}}) \cdot \vec{r}_{PO_L} + \mathbf{M}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{v}_{PO_L}$$

Aqui abriremos um parêntesis para verificarmos a identidade:

$$(\frac{d}{dt}\mathbf{M}^{\mathbf{T}}) \cdot \vec{s}_L = \vec{\omega} \times \vec{s}_G$$

Onde **s** é um vetor qualquer nas bases local e global ($\mathbf{s}_L = (u, v, w)$ e $\mathbf{s}_G = \mathbf{M}^{\mathbf{T}}.\mathbf{s}_L$) respectivamente. Para isto, vejamos os dois desenvolvimentos a seguir:

$$(\frac{d}{dt}\mathbf{M}^{\mathbf{T}}) \cdot \vec{s}_L = -\dot{\theta} \cdot \begin{bmatrix} \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = -\dot{\theta} \cdot \begin{Bmatrix} u\,\text{sen}\theta + v\cos\theta \\ v\,\text{sen}\theta - u\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{17}$$

e:

$$\vec{\omega} \times \vec{s}_G = \vec{\omega} \times (\mathbf{M}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{s}_L) = \vec{\omega} \times \left(\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \left(\dot{\theta}\,\vec{k}\right) \times \left[(u\cos\theta - v\text{sen}\theta)\vec{i} + (u\text{sen}\theta + v\cos\theta)\vec{j} + w\vec{k}\right] = -\dot{\theta} \cdot \begin{Bmatrix} u\,\text{sen}\theta + v\cos\theta \\ v\,\text{sen}\theta - u\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{18}$$

Agora comparando as expressões 17 e 18, concluímos que:

$$(\frac{d}{dt}\mathbf{M}^{\mathbf{T}}) \cdot \vec{s}_L = \vec{\omega} \times \vec{s}_G \tag{19}$$

E a expressão para o vetor velocidade:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_{o_G} + (\frac{d}{dt}\mathbf{M}^{\mathbf{T}}) \cdot \vec{r}_{PO_L} + \mathbf{M}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{v}_{PO_L}$$

Passa a ser:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_{o_G} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PO_G} + \vec{v}_{PO_G}$$

Ou finalmente, em sua forma simplificada:

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PO} + \vec{v}_{PO} \qquad (20)$$

Aceleração

Diferenciando o vetor velocidade, em relação ao tempo:

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{o_G} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PO_G} + \vec{v}_{PO_G}) = \frac{d}{dt}\vec{v}_{o_G} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_{PO_G}) + \frac{d}{dt}(\mathbf{M}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{v}_{PO_L})$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_{o_G} + (\frac{d}{dt}\vec{\omega}) \times \vec{r}_{PO_G} + \vec{\omega} \times (\frac{d}{dt}\vec{r}_{PO_G}) + (\frac{d}{dt}\mathbf{M}^{\mathbf{T}}) \cdot \vec{v}_{PO_L} + \mathbf{M}^{\mathbf{T}} \cdot (\frac{d}{dt}\vec{v}_{PO_L})$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_{o_G} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{PO_G} + \vec{\omega} \times [\frac{d}{dt}(\mathbf{M}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{r}_{PO_L})] + (\frac{d}{dt}\mathbf{M}^{\mathbf{T}}) \cdot \vec{v}_{PO_L} + \mathbf{M}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{a}_{PO_L}$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_{o_G} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{PO_G} + \vec{\omega} \times [(\frac{d}{dt}\mathbf{M}^{\mathbf{T}}) \cdot \vec{r}_{PO_L} + \mathbf{M}^{\mathbf{T}} \cdot (\frac{d}{dt}\vec{r}_{PO_L})] + (\frac{d}{dt}\mathbf{M}^{\mathbf{T}}) \cdot \vec{v}_{PO_L} + \vec{a}_{PO_G}$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_{o_G} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{PO_G} + \vec{\omega} \times [(\frac{d}{dt}\mathbf{M}^{\mathbf{T}}) \cdot \vec{r}_{PO_L}] + \vec{\omega} \times (\mathbf{M}^{\mathbf{T}} \cdot \vec{v}_{PO_L}) + (\frac{d}{dt}\mathbf{M}^{\mathbf{T}}) \cdot \vec{v}_{PO_L} + \vec{a}_{PO_G}$$

Como já mostrado anteriormente (equação 19):

$$(\frac{d}{dt}\mathbf{M}^{\mathbf{T}}) \cdot \vec{s}_L = \vec{\omega} \times \vec{s}_G$$

Substituindo as duas identidades, vamos obter então:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_{o_G} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{PO_G} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{PO_G}) + \vec{\omega} \times \vec{v}_{PO_G} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{PO_G} + \vec{a}_{PO_G}$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_{o_G} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{PO_G} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{PO_G}) + 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_{PO_G} + \vec{a}_{PO_G}$$

E, finalmente, considerando variáveis sem índice no sistema global:

$$\vec{a} = \vec{a}_o + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{PO} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{PO}) + 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_{PO} + \vec{a}_{PO} \qquad (21)$$

3 Significado Físico das Equações

Lembrando que os nossos estudos analisam a situação em que o ponto *P* tem uma trajetória conhecida - deslocamento, velocidade e aceleração – relativamente ao sistema local e que este, sistema local, também tem movimento e rotação em relação a um sistema inercial fixo, o nosso objetivo principal consiste em se descrever o movimento, velocidade e aceleração do ponto *P* em relação a este sistema fixo. Assim os deslocamentos, velocidades e acelerações são ditos relativos ao sistema local e, absolutos em relação ao sistema global.

Assim, podemos entender a notação:

> $\mathbf{r}_{PO}$ como sendo o vetor deslocamento do ponto *P*, relativo à origem O do sistema local.

E a notação:

> $\mathbf{r}$ como sendo o vetor deslocamento absoluto do ponto *P*, em relação ao sistema global.

Também, nas expressões finais obtidas, as coordenadas de todos os vetores envolvidos (inclusive $\mathbf{r}_{PO}$, $\mathbf{v}_{PO}$, etc.) estão no sistema global.

3.1 Equações para a Translação Curvilínea

Para este caso, o sistema local tem os seus três eixos *u*, *v* e *w* sempre paralelos aos eixos *x*, *y* e *z* do sistema global respectivamente, assim os vetores deslocamento, velocidade e aceleração relativos têm as mesmas coordenadas nos dois sistemas.

Vejamos uma aplicação, na Figura 6, vamos obter os vetores deslocamento, velocidade e aceleração absolutos para o ponto *P*, situado no centro do cilindro *E*, este desliza na haste horizontal *CD* com velocidade linear positiva e aceleração de 4 m/seg^2, relativamente à esta haste. A haste *AC* mede 2 m e gira em torna do ponto *A* com velocidade angular constante (sentido horário) de 3 rad/seg. Considerando que, para $t = 0$, a haste *AC* estará na vertical e o centro do cilindro *E* estará sobre o ponto *C* com velocidade nula.

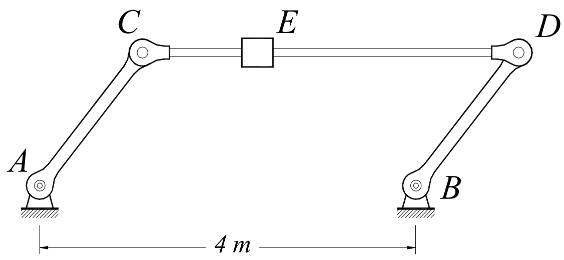

Figura 6 - Cilindro *E* deslocando-se na haste *CD*.

Analisando o mecanismo, podemos colocar a origem do sistema global no ponto A, com o eixo *x* alinhado ao segmento *AB* e a origem do sistema local no ponto *C*, com o eixo *u* alinhado com o segmento *CD*, como na Figura 7 mostrada abaixo.

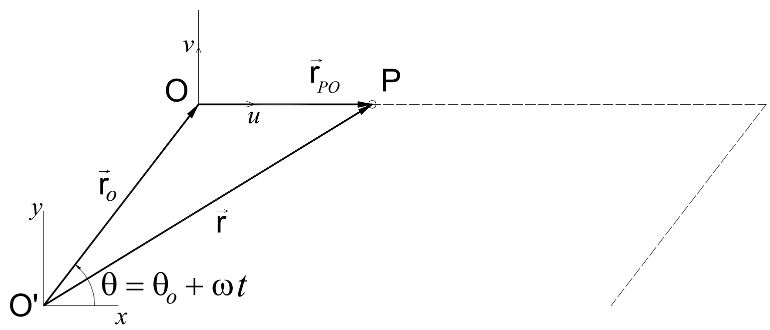

Figura 7 - Sistema Local em Translação Curvilínea

Resolução:

Temos:

$$\theta = \theta_o + \omega t$$

e, para t = 0, devemos ter $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, logo:

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \omega t$$

Também, no sistema local:

$$a_{PO} = 4 = cte.$$

$$v_{PO} = v_{PO_o} + a_{PO} t$$

$$r_{PO} = r_{PO_o} + v_{PO_o} t + a_{PO} \cdot \frac{t^2}{2}$$

Agora, considerando que em $t = 0$, devemos ter $v_{PO} = 0 \; e \; r_{PO} = 0$, vamos obter:

$$v_{PO} = a_{PO} t$$

$$r_{PO} = \frac{1}{2} a_{PO} t^2$$

Podemos então compor a expressão para o deslocamento absoluto:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \mathbf{I} \cdot \vec{r}_{PO_L} = \vec{r}_o + \vec{r}_{PO}$$

$$\vec{r} = (r_o \cdot \cos\theta \cdot \vec{i} + r_o \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \vec{j}) + (\frac{1}{2} a_{PO} t^2)\vec{i}$$

$$\vec{r} = (r_o \cdot \cos\theta + \frac{1}{2} a_{PO} t^2)\vec{i} + (r_o \cdot \operatorname{sen}\theta)\vec{j}$$

Substituindo os valores dados:

$$r_o = 2m$$

$$a_{PO} = 4m/seg^2$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \omega t$$

$$\omega = -3rad/seg$$

Obtemos:

$$\vec{r} = (2 \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \omega t) + 2t^2)\vec{i} + (2 \cdot \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + \omega t))\vec{j}$$

$$\vec{r} = (2 \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - 3t) + 2t^2)\vec{i} + (2 \cdot \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - 3t))\vec{j}$$

$$\vec{r} = (2 \cdot \operatorname{sen}(3t) + 2t^2)\vec{i} + (2 \cdot \cos(3t))\vec{j}$$

Que é a equação para o deslocamento no sistema global. Para um esboço do gráfico de deslocamento no plano *xy*, teremos as equações:

$$x = 2 \cdot \operatorname{sen}(3t) + 2t^2$$

$$y = 2 \cdot \cos(3t)$$

Cujo gráfico para $0 \le t < \pi$ é mostrado na Figura 8 abaixo.

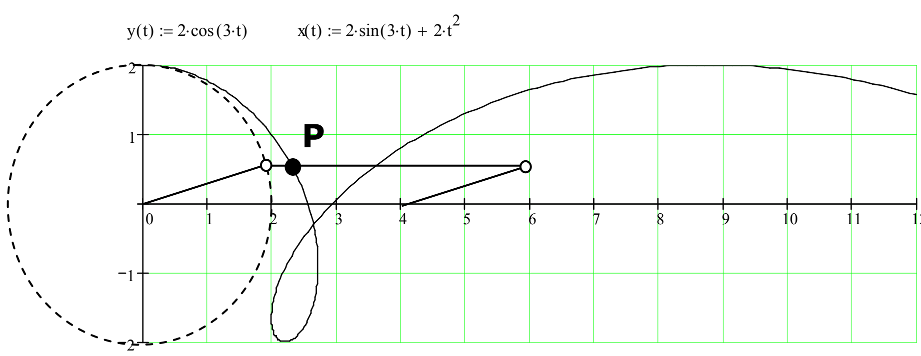

Figura 8 - Curva de deslocamento para o ponto *P*.

Para a velocidade:

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{v}_{PO}$$

sendo $\vec{v}_o$ o vetor velocidade absoluta do ponto O, como indicado na Figura 9.

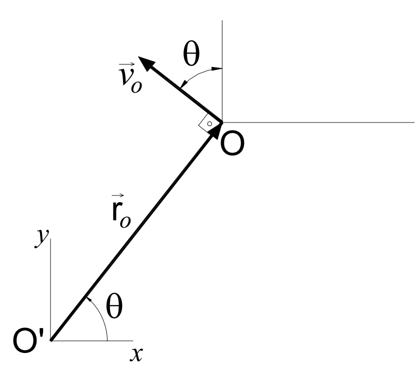

Figura 9 - Vetor $\mathbf{v}_o$.

Então:

$\|\vec{v}_o\| = \omega \cdot \|\vec{r}_o\|$, ou simplesmente $v_o = \omega r_o$ e, pela Figura 9:

$$\vec{v}_o = (-\omega r_o \cdot \mathrm{sen}\theta)\vec{i} + (\omega r_o \cdot \cos\theta)\vec{j}$$

E, lembrando que $v_{PO} = a_{PO}t$, teremos:

$$\vec{v} = (-\omega r_o \cdot \mathrm{sen}\theta)\vec{i} + (\omega r_o \cdot \cos\theta)\vec{j} + (a_{PO}t)\vec{i}$$

E, ainda substituindo $\theta = \frac{\pi}{2} + \omega t$, teremos:

$$\vec{v} = (-\omega r_o \cdot \mathrm{sen}(\frac{\pi}{2} + \omega t) + a_{PO}t)\vec{i} + (\omega r_o \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \omega t))\vec{j}$$

E, mais uma vez, substituindo os valores dados, vamos obter:

$$\vec{v} = (6 \cdot \cos(3\mathrm{t}) + 4t)\vec{i} - (6 \cdot \mathrm{sen}(3\mathrm{t}))\vec{j}$$

Para a aceleração:

$$\vec{a} = \vec{a}_o + \vec{a}_{PO}$$

Neste caso, temos a aceleração centrípeta dada por:

$$\vec{a}_o = -\omega^2 r_o((\cos\theta)\vec{i} + (\mathrm{sen}\theta)\vec{j})$$

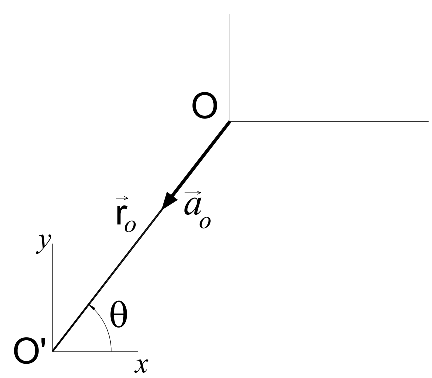

Figura 10 - Aceleração Centrípeta $\boldsymbol{a}_o$.

E, lembrando que $a_{PO} = 4 = cte$, teremos:

$$\vec{a} = -\omega^2 r_o((\cos\theta)\vec{i} + (\mathrm{sen}\theta)\vec{j}) + (a_{PO})\vec{i}$$

$$\vec{a} = (a_{PO} - \omega^2 r_o(\cos\theta))\vec{i} - \omega^2 r_o(\mathrm{sen}\theta)\vec{j}$$

E, substituindo os valores dados:

$$\vec{a} = (4 - 18 \cdot \mathrm{sen}(3t))\vec{i} - 18 \cdot (\cos(3t))\vec{j}$$

É interessante notar que as equações que foram obtidas, aplicando-se as expressões desenvolvidas, para velocidade e aceleração, poderiam ter sido obtidas diretamente por diferenciação na expressão do deslocamento.

Com efeito, para deslocamento tivemos:

$$\vec{r} = (2 \cdot \mathrm{sen}(3t) + 2t^2)\vec{i} + (2 \cdot \cos(3t))\vec{j}$$

Que, sendo diferenciada uma vez em relação ao tempo fornece:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (6 \cdot \cos(3\mathrm{t}) + 4t)\vec{i} - (6 \cdot \mathrm{sen}(3\mathrm{t}))\vec{j}$$

E duas vezes em relação ao tempo:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (4 - 18 \cdot \mathrm{sen}(3t))\vec{i} - 18 \cdot (\cos(3t))\vec{j}$$

Que são as expressões para velocidade e aceleração já encontradas.

3.2 Equações para um Sistema em Rotação e Translação

Lembrando, para este caso, as equações obtidas foram:

$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{r}_{PO}$ Para deslocamento;

$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PO} + \vec{v}_{PO}$ Para velocidade;

$\vec{a} = \vec{a}_o + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{PO} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{PO}) + 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_{PO} + \vec{a}_{PO}$ Para aceleração.

Referindo-se as coordenadas ao sistema global.

Vamos agora obter os vetores deslocamento, velocidade e aceleração absolutas para o ponto *P*, veja a figura 11, situado no centro do cilindro *E* que desliza na haste horizontal *BC* com velocidade linear de 5 m/seg e aceleração de 4 m/seg^2, relativamente à esta haste. A haste *AC* gira em torna do ponto *A* com velocidade angular constante (sentido anti-horário) de 3 rad/seg. *AC* e *CB* têm 2 m de comprimento. Considerando que, para *t = 0*, a haste *AC* estará na horizontal e o centro do cilindro *E* sobre o ponto *B*.

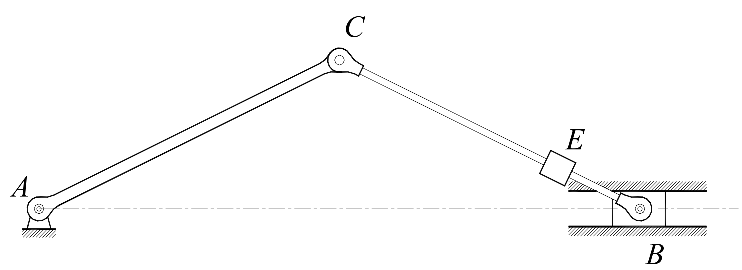

Figura 11 - Cilindro *E* deslocando-se na haste *BC*.

Em uma analise do mecanismo, verificamos que é possível colocar a origem do sistema global no ponto A, com o eixo *x* alinhado ao segmento *AB* e a origem do sistema local no ponto *B*, com o eixo *v* alinhado com o segmento *BC*, como na Figura 12 mostrada abaixo.

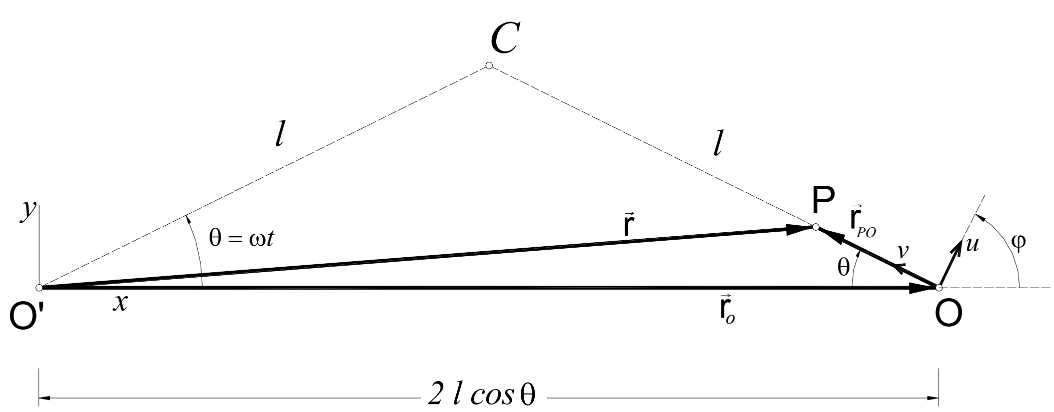

Figura 12 - Sistema Local tendo Rotação e Translação.

Resolução:

Como para t = 0, $\theta_o = 0$, é imediato que:

$\theta = \omega t$

E, no sistema local, a aceleração, velocidade e deslocamento escalares ficam:

$a_{PO} = 4 = cte.$

$v_{PO} = v_{PO_o} + a_{PO} t$

$$r_{PO} = r_{PO_o} + v_{PO_o} t + a_{PO} \cdot \frac{t^2}{2}$$

E em *t = 0*, $v_{PO} = 0$ *e* $r_{PO} = 0$, obtemos então:

$v_{PO} = a_{PO} t$

$$r_{PO} = \frac{1}{2} a_{PO} t^2$$

Pela figura 12, verificamos que o ângulo φ é igual a $\frac{\pi}{2}-\theta$, e então:

$$\text{sen}\varphi=\cos\theta \;\; e \;\; \cos\varphi=\text{sen}\theta$$

E a matriz transposta será:

$$\mathbf{M}^{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\text{sen}\varphi & 0\\ \text{sen}\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{sen}\theta & -\cos\theta & 0\\ \cos\theta & \text{sen}\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Aplicando esta matriz aos vetores locais $\vec{r}_{PO_L}$, $\vec{v}_{PO_L}$ e $\vec{a}_{PO_L}$, vamos obter no sistema global:

$$\vec{r}_{PO}=\mathbf{M}^{\mathbf{T}}\cdot\vec{r}_{PO_L}=\begin{bmatrix}\text{sen}\theta & -\cos\theta & 0\\ \cos\theta & \text{sen}\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}0\\ \frac{a_{PO}}{2}t^2\\ 0\end{Bmatrix}=\frac{a_{PO}t^2}{2}(-\cos\theta\cdot\vec{i}+\text{sen}\theta\cdot\vec{j})$$

$$\vec{v}_{PO}=\mathbf{M}^{\mathbf{T}}\cdot\vec{v}_{PO_L}=\begin{bmatrix}\text{sen}\theta & -\cos\theta & 0\\ \cos\theta & \text{sen}\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}0\\ a_{PO}t\\ 0\end{Bmatrix}=a_{PO}t(-\cos\theta\cdot\vec{i}+\text{sen}\theta\cdot\vec{j})$$

$$\vec{a}_{PO}=\mathbf{M}^{\mathbf{T}}\cdot\vec{a}_{PO_L}=\begin{bmatrix}\text{sen}\theta & -\cos\theta & 0\\ \cos\theta & \text{sen}\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}0\\ a_{PO}\\ 0\end{Bmatrix}=a_{PO}(-\cos\theta\cdot\vec{i}+\text{sen}\theta\cdot\vec{j})$$

Devemos notar também que sendo $\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta$, teremos:

$$\dot{\varphi}=-\dot{\theta}$$

Vamos distinguir, portanto:

$$\vec{\omega}_{AC}=\omega\cdot\vec{k} \;\; e \;\; \vec{\omega}_{SL}=-\omega\cdot\vec{k}$$

Sendo ω_{AC} e ω_{SL} os vetores velocidade angular para a barra AC e para o sistema local respectivamente e ω a componente escalar da velocidade angular da barra AC.

Por simplicidade, doravante quando nos referirmos ao vetor ω_{SL}, usaremos apenas ω como indicação do vetor velocidade angular do sistema local.

$$\vec{\omega}=\vec{\omega}_{SL}=-\omega\cdot\vec{k}$$

As expressões para o deslocamento absoluto serão:

$$\vec{r}=\vec{r}_o+\mathbf{M}^{\mathbf{T}}\cdot\vec{r}_{PO_L}=\vec{r}_o+\vec{r}_{PO}$$

$$\vec{r}=2\cdot l\cdot\cos\theta\cdot\vec{i}+\frac{1}{2}a_{PO}t^2(-\cos\theta\cdot\vec{i}+\text{sen}\theta\cdot\vec{j})$$

$$\vec{r}=(2\cdot l-\frac{1}{2}a_{PO}t^2)\cos\theta\cdot\vec{i}+\frac{1}{2}a_{PO}t^2\cdot\text{sen}\theta\cdot\vec{j}$$

Substituindo os valores dados:

$$l=2m$$

$$a_{PO}=4m/seg^2$$

$$\omega=3rad/seg$$

$$\theta=\omega t=3t$$

Obtemos:

$$\vec{r}=(2\times2-\frac{1}{2}4t^2)\cos(3t)\cdot\vec{i}+\frac{1}{2}4t^2\cdot\text{sen}(3\text{t})\cdot\vec{j}$$

$$\vec{r}=(4-2t^2)\cos(3t)\cdot\vec{i}+2t^2\cdot\text{sen}(3\text{t})\cdot\vec{j}$$

Que é a equação para o deslocamento no sistema global. Para um esboço do gráfico de deslocamento no plano xy, teremos as equações:

$$x(t) = 2(2 - t^2)\cos(3t)$$

$$y(t) = 2t^2 \cdot \mathrm{sen}(3t)$$

Cujo gráfico para $0 \le t < \pi$ é mostrado na Figura 13 abaixo.

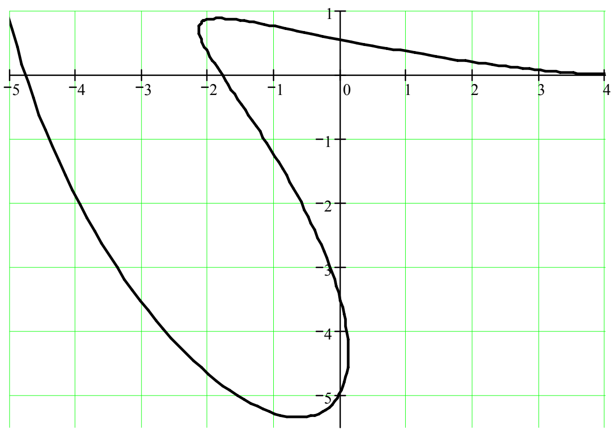

Figura 13 - Curva de deslocamento para o ponto *P*.

Lembrando que $\vec{\omega}$ representa o vetor $\vec{\omega}_{SL}$, rotação angular do sistema local, teremos a seguinte expressão para o vetor velocidade no sistema global:

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PO} + \vec{v}_{PO}$$

sendo $\vec{v}_o$ o vetor velocidade absoluta do ponto O, que pode ser obtida por:

$$\vec{v}_o = \frac{d}{dt}\vec{v}_o = \frac{d}{dt}(2 \cdot l \cdot \cos\theta \cdot \vec{i}) = -2 \cdot l \cdot \dot{\theta} \cdot \mathrm{sen}\theta \cdot \vec{i} = -2 \cdot l \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}\theta \cdot \vec{i}$$

E, já obtivemos:

$$\vec{r}_{PO} = \frac{a_{PO}t^2}{2}(-\cos\theta \cdot \vec{i} + \mathrm{sen}\theta \cdot \vec{j})$$

$$\vec{v}_{PO} = a_{PO}t(-\cos\theta \cdot \vec{i} + \mathrm{sen}\theta \cdot \vec{j})$$

$$\vec{a}_{PO} = a_{PO}(-\cos\theta \cdot \vec{i} + \mathrm{sen}\theta \cdot \vec{j})$$

Desta forma, teremos:

$$\vec{v} = -2 \cdot l \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}\theta \cdot \vec{i} - \omega \cdot \vec{k} \times \frac{a_{PO}t^2}{2}(-\cos\theta \cdot \vec{i} + \mathrm{sen}\theta \cdot \vec{j}) + a_{PO}t(-\cos\theta \cdot \vec{i} + \mathrm{sen}\theta \cdot \vec{j})$$

$$\vec{v} = -2 \cdot l \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}\theta \cdot \vec{i} - \frac{\omega \cdot a_{PO}t^2}{2}[-\cos\theta(\vec{k} \times \vec{i}) + \mathrm{sen}\theta(\vec{k} \times \vec{j})] - (a_{PO}t \cdot \cos\theta)\vec{i} + (a_{PO}t \cdot \mathrm{sen}\theta)\vec{j}$$

$$\vec{v} = -2 \cdot l \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}\theta \cdot \vec{i} + (\frac{\omega \cdot a_{PO}t^2}{2}\cos\theta)\vec{j} + (\frac{\omega \cdot a_{PO}t^2}{2}\mathrm{sen}\theta)\vec{i} - (a_{PO}t \cdot \cos\theta)\vec{i} + (a_{PO}t \cdot \mathrm{sen}\theta)\vec{j}$$

$$\vec{v} = -(2 \cdot l \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}\theta - \frac{\omega \cdot a_{PO}t^2}{2}\mathrm{sen}\theta + a_{PO}t \cdot \cos\theta)\vec{i} + (a_{PO}t \cdot \mathrm{sen}\theta + \frac{\omega \cdot a_{PO}t^2}{2}\cos\theta)\vec{j}$$

Substituindo os valores dados, vamos obter:

$$\vec{v} = -[2 \times 2 \times 3 \times \mathrm{sen}(3t) - \frac{3 \times 4t^2}{2}\mathrm{sen}(3t) + 4t \cdot \cos(3t)]\vec{i} + [4t \times \mathrm{sen}(3t) + \frac{3 \times 4t^2}{2}\cos(3t)]\vec{j}$$

$$\vec{v} = -[12\mathrm{sen}(3t) - 6t^2\mathrm{sen}(3t) + 4t \cdot \cos(3t)]\vec{i} + [4t \cdot \mathrm{sen}(3t) + 6t^2\cos(3t)]\vec{j}$$

$$\vec{v} = 2\{-[(6 - 3t^2)\mathrm{sen}(3t) + 2t \cdot \cos(3t)]\vec{i} + [2t \cdot \mathrm{sen}(3t) + 3t^2\cos(3t)]\vec{j}\}$$

Para a aceleração:

$$\vec{a} = \vec{a}_o + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{PO} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{PO}) + 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_{PO} + \vec{a}_{PO}$$

Aqui, a aceleração da origem do sistema local $\vec{a}_o$ pode ser obtida por:

$$\vec{a}_o = \frac{d}{dt}\vec{v}_o = \frac{d}{dt}(-2 \cdot l \cdot \dot{\theta} \cdot \mathrm{sen}\theta \cdot \vec{i}) = -2 \cdot l \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos\theta \cdot \vec{i} = -2 \cdot l \cdot \omega^2 \cdot \cos\theta \cdot \vec{i}$$

O enunciado do problema fornece $\dot{\omega}_{AC} = 0$ e portanto, $\dot{\vec{\omega}}_{SL} = -\dot{\vec{\omega}}_{AC} = \vec{0}$

$$\vec{a} = \vec{a}_o + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{PO}) + 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_{PO} + \vec{a}_{PO}$$

Calculando $\vec{\omega} \times \vec{r}_{PO}$:

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_{PO} = -\omega \cdot \vec{k} \times \frac{a_{PO}t^2}{2}(-\cos\theta \cdot \vec{i} + \mathrm{sen}\theta \cdot \vec{j}) = \frac{-\omega \cdot a_{PO}t^2}{2}[-\cos\theta(\vec{k} \times \vec{i}) + \mathrm{sen}\theta(\vec{k} \times \vec{j})]$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_{PO} = (\frac{\omega \cdot a_{PO}t^2}{2}\mathrm{sen}\theta)\vec{i} + (\frac{\omega \cdot a_{PO}t^2}{2}\cos\theta)\vec{j}$$

Calculando agora $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{PO})$:

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{PO}) = -\omega \cdot \vec{k} \times [(\frac{\omega \cdot a_{PO}t^2}{2}\mathrm{sen}\theta)\vec{i} + (\frac{\omega \cdot a_{PO}t^2}{2}\cos\theta)\vec{j}]$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{PO}) = \frac{-\omega^2 \cdot a_{PO}t^2}{2} \cdot [\mathrm{sen}\theta(\vec{k} \times \vec{i}) + \cos\theta(\vec{k} \times \vec{j})]$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{PO}) = (\frac{\omega^2 \cdot a_{PO}t^2}{2}\cos\theta)\vec{i} - (\frac{\omega^2 \cdot a_{PO}t^2}{2}\mathrm{sen}\theta)\vec{j}$$

Calculando também $\vec{\omega} \times \vec{v}_{PO}$:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_{PO} = -\omega \cdot \vec{k} \times a_{PO}t(-\cos\theta \cdot \vec{i} + \mathrm{sen}\theta \cdot \vec{j}) = -\omega \cdot a_{PO}t \cdot [-\cos\theta(\vec{k} \times \vec{i}) + \mathrm{sen}\theta(\vec{k} \times \vec{j})]$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_{PO} = (\omega \cdot a_{PO}t \cdot \mathrm{sen}\theta)\vec{i} + (\omega \cdot a_{PO}t \cdot \cos\theta)\vec{j}$$

Desta forma, a expressão da aceleração fica:

$$\vec{a} = -2 \cdot l \cdot \omega^2 \cdot \cos\theta \cdot \vec{i} + (\frac{\omega^2 \cdot a_{PO}t^2}{2}\cos\theta)\vec{i} - (\frac{\omega^2 \cdot a_{PO}t^2}{2}\mathrm{sen}\theta)\vec{j} +$$
$$+ 2 \cdot [(\omega \cdot a_{PO}t \cdot \mathrm{sen}\theta)\vec{i} + (\omega \cdot a_{PO}t \cdot \cos\theta)\vec{j}] + a_{PO}(-\cos\theta \cdot \vec{i} + \mathrm{sen}\theta \cdot \vec{j})$$

$$\vec{a} = -(2 \cdot l \cdot \omega^2 \cdot \cos\theta - \frac{\omega^2 \cdot a_{PO}t^2}{2}\cos\theta - 2\omega \cdot a_{PO}t \cdot \mathrm{sen}\theta + a_{PO}\cos\theta)\vec{i} +$$
$$-(\frac{\omega^2 \cdot a_{PO}t^2}{2}\mathrm{sen}\theta - 2\omega \cdot a_{PO}t \cdot \cos\theta - a_{PO}\mathrm{sen}\theta)\vec{j}$$

Substituindo os valores dados:

$$\vec{a} = -[2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot \cos(3\mathrm{t}) - \frac{3^2 \times 4t^2}{2}\cos(3\mathrm{t}) - 2 \times 3 \cdot 4t \cdot \mathrm{sen}(3\mathrm{t}) + 4\cos(3t)]\vec{i} +$$
$$-[\frac{3^2 \times 4t^2}{2}\mathrm{sen}(3\mathrm{t}) - 2 \times 3 \times 4t \cdot \cos(3t) - 4\mathrm{sen}(3\mathrm{t})]\vec{j}$$

$$\vec{a} = -[36 \cdot \cos(3\mathrm{t}) - 18t^2\cos(3\mathrm{t}) - 24t \cdot \mathrm{sen}(3\mathrm{t}) + 4\cos(3t)]\vec{i} +$$
$$-[18t^2\mathrm{sen}(3\mathrm{t}) - 24t \cdot \cos(3t) - 4\mathrm{sen}(3\mathrm{t})]\vec{j}$$

$$\vec{a} = 2\{[(9t^2 - 20)\cos(3\mathrm{t}) + 12t \cdot \mathrm{sen}(3\mathrm{t})]\vec{i} + [(2 - 9t^2)\mathrm{sen}(3\mathrm{t}) + 12t \cdot \cos(3t)]\vec{j}\}$$

Estas são as equações que foram obtidas, aplicando-se as expressões desenvolvidas, para velocidade e aceleração. Note que elas também poderiam ser obtidas diretamente por diferenciação na expressão do deslocamento.

De fato, para deslocamento tivemos:

$$\vec{r} = 2\{(2-t^2)\cos(3t)\cdot\vec{i} + t^2\cdot\mathrm{sen(3t)}\cdot\vec{j}\}$$

Que, sendo diferenciada uma vez em relação ao tempo fornece:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = 2\{-[3(2-t^2)\mathrm{sen(3t)} + 2t\cdot\cos(3t)]\vec{i} + [2t\cdot\mathrm{sen(3t)} + 3t^2\cos(3t)]\vec{j}\}$$

Que é a expressão já obtida para a velocidade.

Diferenciando em relação ao tampo mais uma vez:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = 2\{[(9t^2-20)\cos(3\mathrm{t}) + 12t\cdot\mathrm{sen(3t)}]\vec{i} + [(2-9t^2)\mathrm{sen(3t)} + 12t\cdot\cos(3t)]\vec{j}\}$$

Que é a aceleração acima obtida: