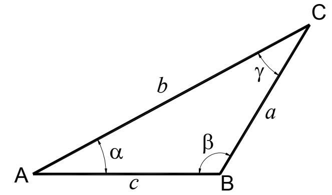
Matemática Básica

Mecanismos - Ficha resumo 01

Prof. José Maria Bezerra

Trigonometria Elementar

Relações no triângulo qualquer.



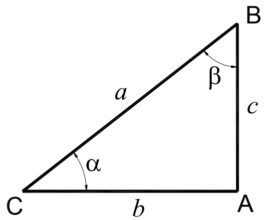
Lei dos senos:

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma}$$

Lei dos co-senos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Relações no triângulo retângulo.



Expressões Fundamentais:

Seno de α:

$$sen\,\alpha = \frac{c}{a}$$

Co-seno de α:

$$\cos\alpha = \frac{b}{a}$$

Tangente de α:

$$tg\,\alpha = \frac{c}{b} = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$$

Co-tangente de α:

$$cotg\,\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha}$$

Secante de α:

$$\sec\alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Co-secante de α:

$$cosec\,\alpha = \frac{a}{c} = \frac{1}{sen\,\alpha}$$

Ângulos notáveis:

x	0º 0	30º π/6	45º π/4	60º π/3	90º π/2
$sen\,x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\,x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Projeções:

$$a\cdot sen\,\alpha = c$$
$$a\cdot\cos\alpha = b$$

Relações Trigonométricas

Relação Fundamental da Trigonometria

$$sen^2 a + \cos^2 a = 1$$

Conseqüências:

$$1 - sen^2 a = \cos^2 a$$
$$1 - \cos^2 a = sen^2 a$$
$$1 + tg^2 a = \sec^2 a$$
$$1 + cotg^2 a = cosec^2 a$$

Outras Relações:

$$sen(-a) = -sen\,a$$
$$\cos(-a) = \cos a$$
$$sen(\frac{\pi}{2} - a) = sen(\frac{\pi}{2} + a) = \cos a$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - a) = sen\,a$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} + a) = -sen\,a$$

Adição/Subtração de Arcos

$$sen(a+b) = sen\,a\cdot\cos b + sen\,b\cdot\cos a$$
$$sen(a-b) = sen\,a\cdot\cos b - sen\,b\cdot\cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a\cdot\cos b - sen\,a\cdot sen\,b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cdot\cos b + sen\,a\cdot sen\,b$$
$$tg(a+b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a\cdot tg\,b}$$
$$tg(a-b) = \frac{tg\,a - tg\,b}{1 + tg\,a\cdot tg\,b}$$

Conseqüências:

$$sen\,2a = 2sen\,a\cdot\cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - sen^2 a$$
$$tg\,2a = \frac{2tg\,a}{1 - tg^2 a}$$

Arco Metade

$$sen\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$
$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$
$$tg\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

Diferenciação

Diferenciais Básicas:

$$\frac{da}{dx} = 0 \quad se\ a\ for\ uma\ constante$$
$$\frac{dx}{dx} = 1$$
$$\frac{dx^2}{dx} = 2x$$
$$\frac{dx^n}{dx} = n\cdot x^{n-1}$$

Funções Transcendentais:

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Funções Trigonométricas:

$$\frac{d}{dx}sen\,x = \cos x$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -sen\,x$$
$$\frac{d}{dx}tg\,x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Regras de Diferenciação:

Considerando ***u*** e ***v*** funções em ***x***:

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}u\cdot v = \frac{du}{dx}\cdot v + u\cdot\frac{dv}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(\frac{u}{v}) = \frac{\frac{du}{dx}\cdot v - u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Considerando ***v*** função de ***u,*** e ***u*** função de ***x***:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}sen^2 x = \frac{d}{dx}(sen\,x)^2$$

Vamos fazer:

$$u = sen\,x \;\Rightarrow\; v = u^2$$

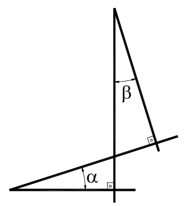
Logo:

$$\frac{du}{dx} = \cos x \quad e \quad \frac{dv}{du} = 2u = 2sen\,x$$
$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 2sen\,x\cdot\cos x$$

Geometria Plana

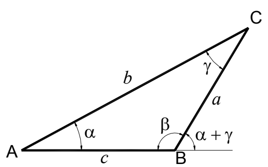
Congruência de Ângulos

Ângulos com lados perpendiculares:



$\alpha = \beta$

Relações no Triângulo

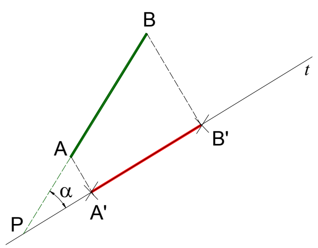


Soma dos ângulos internos:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Se **a = c**, então $\alpha = \gamma$

Projeções



Sobre a reta ***t***:

$$Proj_t \overline{AB} = \overline{A'B'}$$

Ou:

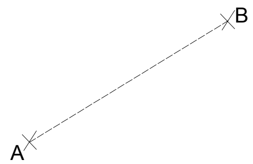
$$Proj_t \overline{AB} = \overline{AB} \cdot cos\,\alpha$$

Distância de ***B*** a ***t***:

$$\overline{BB'} = \overline{PB} \cdot sen\,\alpha$$

Geometria Analítica Básica

Distancia entre dois pontos



Sendo (a_1, a_2, a_3) e (b_1, b_2, b_3) as coordenadas de A e B respectivamente:

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Caso o ponto A coincida com a origem do sistema:

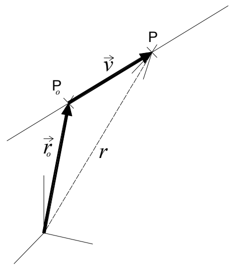
$$\overline{OB} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Coordenadas do segmento orientado AB:¨

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Equação da Reta no Espaço

Conhecidos o vetor direcional ($\vec{v}$) e um ponto da reta ($\vec{r}_o$).



Equação Vetorial:

$$P = P_o + \vec{v}t$$

$$ou$$

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}t$$

Equação Cartesiana:

$$\frac{x - x_o}{a_1} = \frac{y - y_o}{a_2} = \frac{z - z_o}{a_3}$$

Sendo (x_o, y_o, z_o) e (a_1, a_2, a_3) as coordenadas dos vetores r_o e v respectivamente.

No plano ***xy***, a eq. Se transforma em:

$$Ax + By + C = 0$$

Sendo:

$A = -a_2$

$B = a_1$

$C = a_2 x_o - a_1 y_o$

Matrizes e Determinantes

Matriz quadrada de ordem dois.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Produto de escalar por matriz:

$$\alpha \cdot M = \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \end{bmatrix}$$

Determinante para a matriz quadrada de ordem dois:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Regras básicas para o determinante:

1. Caso a matriz tenha uma linha ou uma coluna nula, o determinante será nulo;
2. A troca de duas linhas ou de duas colunas, na matriz, inverte o sinal do determinante.
3. Matrizes com linhas ou colunas iguais ou múltiplas terão determinante nulo.

Matriz Transposta

Dada a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A sua transposta é obtida por:

$$M^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Diferenciação de Matriz

$$Se\ M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Então

$$\frac{dM}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{da_{11}}{dx} & \frac{da_{12}}{x} & \frac{da_{13}}{dx} \\ \frac{da_{21}}{dx} & \frac{da_{22}}{dx} & \frac{da_{23}}{dx} \\ \frac{da_{31}}{dx} & \frac{da_{32}}{dx} & \frac{da_{33}}{dx} \end{bmatrix}$$