CAPÍTULO 2

Coordenadas Generalizadas

Em um sistema de referência cartesiano espacial, a posição de uma partícula é definida pelo seu vetor de posição "r", cujas componentes são as suas coordenadas cartesianas (x, y, z), então, se quisermos especificar a posição de um sistema com "n" partículas, iremos necessitar de "n" vetores de posição, consequentemente $3n$ coordenadas cartesianas, porém, devido ao fato de um sistema sempre conter vínculos ou restrições geométricas, é quase sempre possível se conhecer a posição do sistema a partir de um número de variáveis inferior a $3n$.

Por exemplo, se uma partícula, por algum motivo, move-se apenas sobre uma superfície conhecida (superfície de uma esfera, ou a superfície de um plano xy), bastarão apenas 2 coordenadas para definir completamente a sua posição no espaço. Caso a partícula se desloque ao longo de uma linha, a sua posição pode ser determinada por uma única variável.

Estas coordenadas, que vêm simplificar o posicionamento, são conhecidas como "coordenadas generalizadas" e a sua escolha não é única, cabendo recair na melhor situação que possa simplificar o equacionamento matemático do sistema.

Focando-se os posicionamentos geométricos das diversas barras de um mecanismo no sistema de coordenadas cartesiano, a obtenção das expressões matemáticas inerentes à cinemática ou à dinâmica, de forma geral pode se tornar bastante complexa, tornando-se, em muitos casos, impossível uma análise direta e, tendo-se que recorrer aos métodos numéricos para uma solução mais elaborada do problema. No que diz respeito ao equacionamento de seus deslocamentos, velocidades e acelerações, à medida em que aumentamos o número de barras na sua constituição, o posicionamento cartesiano vai se tornando cada vez mais complexo. No intuito de contornar este problema, vamos estender o conceito de coordenadas generalizadas no posicionamento das diversas barras de um mecanismo, simplificando e permitindo uma análise cinemática bastante concisa de forma geral.

2.1. Coordenadas Generalizadas aplicadas a Corpos Rígidos

A configuração de um sistema mecânico em que todos os corpos envolvidos tenham movimento plano ou espacial, com um número finito de corpos rígidos, pode ser expressa por um número finito de variáveis reais chamadas coordenadas generalizadas. Cada corpo rígido, no plano, poderá ser denotado por três coordenadas generalizadas ou por seis coordenadas no espaço, percebendo-se que, no plano, este tem três graus de liberdade, sendo possíveis dois deslocamentos e uma rotação. No espaço seriam seis, constituídos por três deslocamentos e três rotações. Assim, é fácil a obtenção das variáveis do sistema quando todos os corpos estiverem livres. Para as situações em que isto não ocorre, o sistema pode ser simplificado (reduzido) após a determinação das equações de restrição, como visto à frente. Este sistema geral de coordenadas generalizadas será indicado por:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \tag{2.1}$$

Como exemplo, o sistema mostrado na figura 2.1 pode ser descrito com a utilização do ângulo θ que a barra AB forma com a horizontal e das coordenadas x e y de um ponto qualquer na barra. Nesta situação, as coordenadas generalizadas seriam (x, y, θ). Também poderíamos descrevê-lo utilizando as coordenadas cartesianas de dois pontos distintos da barra e o sistema de coordenadas generalizadas seria então dado por (x_1, y_1, x_2, y_2), que denota um maior grau de complexidade em relação ao primeiro por ter uma coordenada a mais e também por não fornecer uma ideia imediata da posição angular da barra como no primeiro caso.

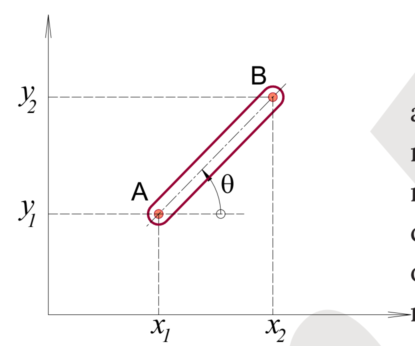

Figura 2.1 Descrição do sistema (barra AB) em coordenadas generalizadas.

Observe

Devem ser evitadas, no sistema de coordenadas generalizadas inicial, variáveis que sejam constantes. Isto só deve acontecer como consequência de restrições futuras.

Restrições ou Vínculos

Pontos materiais de um sistema mecânico ou de partículas podem estabelecer vínculos entre si, através de fixações ou ligações móveis entre dois ou mais corpos, que impõem limitações aos seus deslocamentos. Estes vínculos também são chamados restrições. Observe, porém, que se houver uma ligação entre dois corpos pertencentes ao sistema, do tipo soldagem, ou seja, sem que haja a partir daí possibilidade de movimento relativo entre eles, isto não será uma restrição, e sim uma transformação de dois corpos em um único no referido sistema que passa a ter um corpo a menos. Neste caso serão geradas equações de restrição; subentendemos que aí houve uma "restrição virtual".

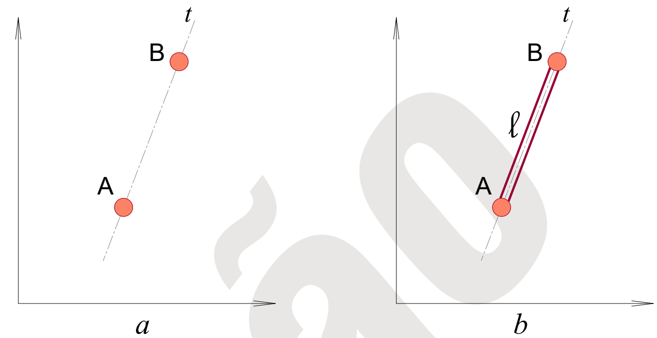

Figura 2.2 Em (a), sistema sem restrição em relação à reta ***t*** e em (b), com restrição imposta pela haste ℓ.

Se a restrição puder ser equacionada com a utilização de coordenadas generalizadas e, eventualmente, também do tempo, quando uma ou mais variáveis que compõem o sistema forem temporais, de tal forma que se possa ter como verdadeira a equação (2.2) a seguir:

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \tag{2.2}$$

Ela será dita holonômica, caso contrário será chamada não-holonômica, como é o caso dos mecanismos com base em órgãos de tração ou compressão como especificado na classificação de Reuleaux.

Saiba mais

Sistemas com órgãos não rígidos onde não se pode prever expansões ou contrações devidas à dilatação térmica no tempo são sempre não-holonômicos.

Graus de Liberdade de um Sistema Mecânico

Determinado convenientemente um sistema de coordenadas generalizadas para um sistema mecânico de corpos rígidos em que as restrições, se houver, sejam todas do tipo holonômicas, define-se o número de graus de liberdade do sistema através da seguinte relação:

$$f = n - r \tag{2.3}$$

onde:

f – número de graus de liberdade do sistema;

n – número de coordenadas generalizadas usadas para descrever o sistema;

r – número de equações de restrição existentes no sistema de coordenadas generalizadas adotado.

Desta forma, o número de graus de liberdade é uma característica intrínseca do sistema e independe do sistema particular de coordenadas utilizado para sua descrição. Apenas ressalte-se que o número de equações de restrição será diferente de um sistema para o outro, desde que os mesmos tenham número de coordenadas diferentes. Em particular, é possível se achar um conjunto de coordenadas independentes, tal que o número de equações de restrição, neste sistema, seja nulo.

Neste ponto se faz interessante ao leitor perceber a singeleza, simplicidade e também exatidão do tratamento matemático que vai permitir a obtenção do número de graus de liberdade para qualquer tipo de sistema de corpos rígidos, a despeito da ideia intuitiva para tal fim que se coloca nos compêndios de mecânica geral. Também, apesar de estarmos dando enfoque a sistemas de corpos rígidos no plano, é fácil perceber que tal tratamento pode ser estendido aos sistemas espaciais sem nenhuma dificuldade.

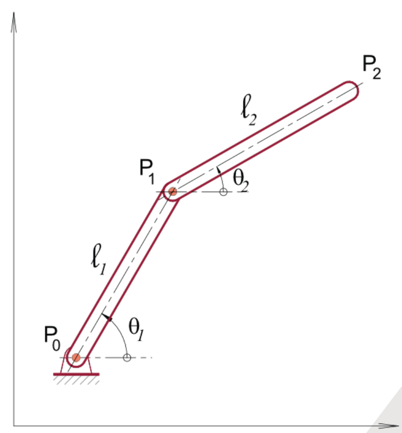

Figura 2.3 Sistema no plano com dois graus de liberdade e duas equações de restrição.

Como exemplo elucidativo, vamos considerar uma haste, figura 2.3, no plano bidimensional (x, y) com uma extremidade fixa em (x_o, y_o) e com capacidade de rotacionar em torno deste. Na outra extremidade desta haste, coloca-se uma segunda, através de um pivô rotativo que permite giro entre as duas.

A configuração do sistema será, então, dada por quatro coordenadas x_{P_1}, y_{P_1}, x_{P_2} e y_{P_2} e, para este caso, o número de equações de restrição é dois:

$$\begin{aligned}(x_{P_o}-x_{P_1})^2+(y_{P_o}-y_{P_1})^2=\ell_1^2\\(x_{P_1}-x_{P_2})^2+(y_{P_1}-y_{P_2})^2=\ell_2^2\end{aligned}\tag{2.4}$$

Note que, aqui, x_{P_o}, y_{P_o}, são constantes que podem ser utilizadas livremente nas equações de restrição, logo, o número de graus de liberdade do sistema será:

$$f=n-r=4-2=2\tag{2.5}$$

Poderíamos também utilizar como coordenadas generalizadas os ângulos θ_1 e θ_2 que as barras fazem com a horizontal. Neste caso, ficaríamos sem nenhuma equação de restrição envolvendo estas coordenadas.

Saiba mais

Se o sistema de coordenadas generalizadas escolhido for linearmente independente, o número de equações de restrição será sempre nulo.

2.2. Exemplo Prático

Vejamos agora um exemplo mais clássico que irá consistir na formação do mecanismo biela manivela, que iremos estudar em detalhes no Capítulo 4. Sejam, portanto, três corpos rígidos, livres no plano, como mostrado na figura 2.4*a*, e descritos pelo sistema de coordenadas generalizadas da equação 2-6 a partir da geometria de posicionamento montada na figura 2.4*b*.

$$(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, \alpha, \varphi, \delta)\tag{2.6}$$

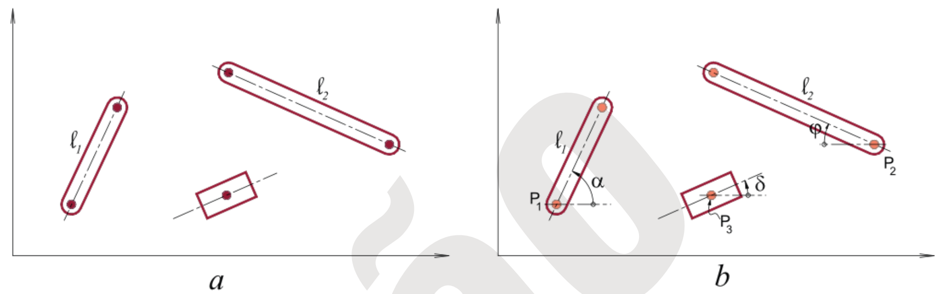

Figura 2.4 Sistema com três corpos rígidos no plano.

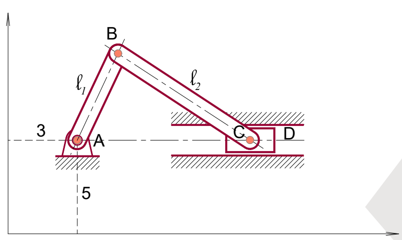

Figura 2.5 Sistema após a aplicação das restrições.

Vamos agora criar quatro restrições para este sistema, figura 2.5, consistindo de um pivotamento nas coordenadas (3,5) do plano para o ponto P_1, vínculo A, um pivotamento entre o corpo 1 e o corpo 2, vínculo B, um pivotamento entre o corpo 2 e o corpo 3, vínculo C, e vamos excluir o deslocamento angular e deslocamento na direção “*y*” para o corpo 3, ficando este sempre na coordenada *y* = 3, vínculo D.

Desta forma, o vínculo A, permitindo que o corpo 1 apenas rotacione na coordenada (3,5), cria as duas restrições da equação (2.7).

$$\begin{array}{ll} x_1 = 3 & (1) \\ y_1 = 5 & (2) \end{array} \tag{2.7}$$

O vínculo B, ligando o corpo 1 ao corpo 2 por uma rotação relativa, cria as duas restrições da equação (2.8).

$$\begin{array}{lll} \ell_1 \cos\alpha + \ell_2 \cos\varphi - x_3 + x_1 & = 0 & (3) \\ \ell_1 \operatorname{sen}\alpha - \ell_2 \operatorname{sen}\varphi & = 0 & (4) \end{array} \tag{2.8}$$

O vínculo C, ligando o corpo 2 ao corpo 3 por uma rotação relativa, cria as duas restrições da equação (2.9).

$$\begin{array}{ll} x_2 = x_3 & (5) \\ y_2 = y_3 & (6) \end{array} \tag{2.9}$$

O vínculo D, limitando o corpo 3 apenas a deslocamentos na horizontal na coordenada 5, cria também duas restrições, mostradas na equação (2.10).

$$\begin{array}{ll} \delta = 0 & (7) \\ y_3 = 5 & (8) \end{array} \tag{2.10}$$

Contando, então, o número de equações de restrição (em número de 8) e o número de coordenadas no sistema original (9), podemos utilizar a equação (2.3), obtendo:

$$f = n - r = 9 - 8 = 1 \tag{2.11}$$

Exercícios

1. Determine um sistema de coordenadas generalizadas, linearmente independente, que descreva o sistema físico esboçado na figura 2.6 abaixo.

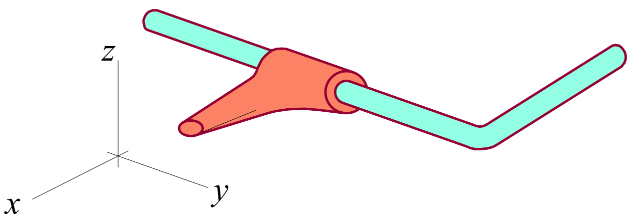

Figura 2.6 Sistema com dois corpos rígidos no espaço.

2. Dado o sistema físico, mostrado na figura 2.7, encontre um sistema de coordenadas generalizadas para o mesmo e, após a montagem do par esférico (junção dos pontos B e C), determine o número de equações de restrição e o número de graus de liberdade para o sistema final.

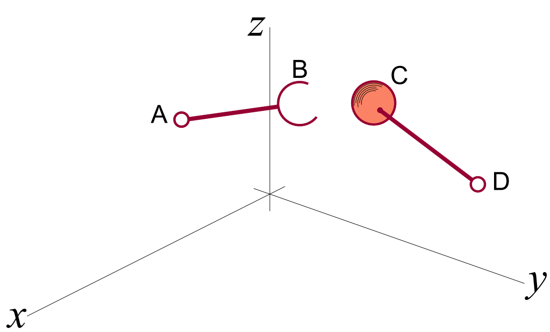

Figura 2.7 Montagem de duas barras com movimento esférico.

3. Para cada um dos sistemas mostrados nas figuras 2.8 e 2.9, determine sistemas de coordenadas generalizadas com as consequentes equações de restrição decorrentes.

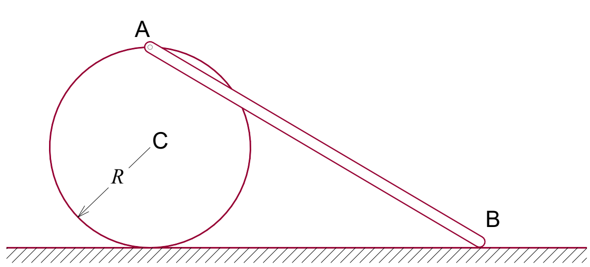

Figura 2.8 Barras em contato por rolamento.

4. Para cada um dos sistemas mostrados nas figuras 2.8 e 2.9, determine sistemas de coordenadas generalizadas com as consequentes equações de restrição decorrentes.

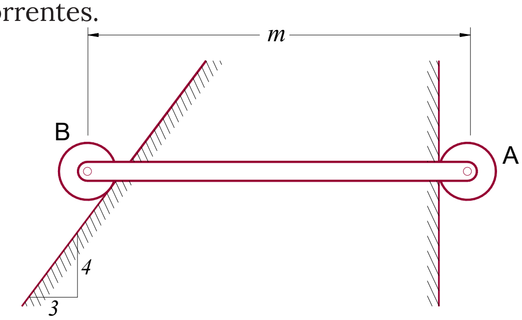

Figura 2.9 Barras em contato por deslizamento.

5. As quatro barras da Figura 2.10a estão inicialmente livres no plano, ligando-se, em seguida, às barras 2, 3 e 4, através de seus pivôs, à barra 1, como mostrado na figura 2.10b. Escolha um sistema de coordenadas generalizadas para estas barras na concepção (a) e, em função deste sistema, determine o número de graus de liberdade após a montagem, como mostrado na concepção (b).

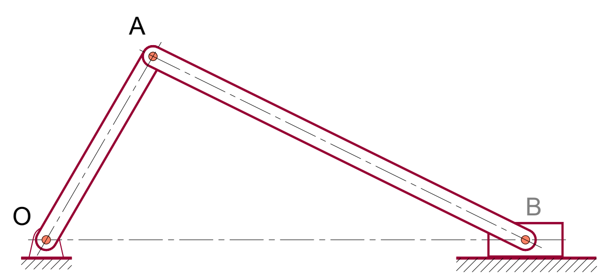

Figura 2.10 Sistema original em "a" e montagem final em "b".

6. Dado o sistema físico, mostrado na figura 2.7, encontre um sistema de coordenadas generalizadas para o mesmo e, após a montagem do par esférico (junção dos pontos B e C), determine o número de

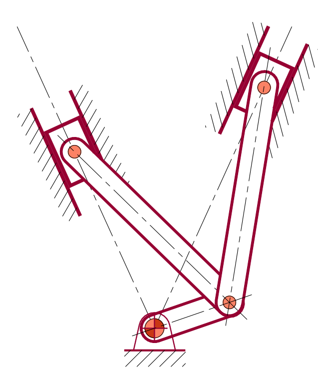

Figura 2.11 Sistema original em "a" e montagem final em "b".

7. Para cada um dos sistemas mostrados nas figuras

2.8 e 2.9, determine sistemas de coordenadas generalizadas com as consequentes equações de restrição

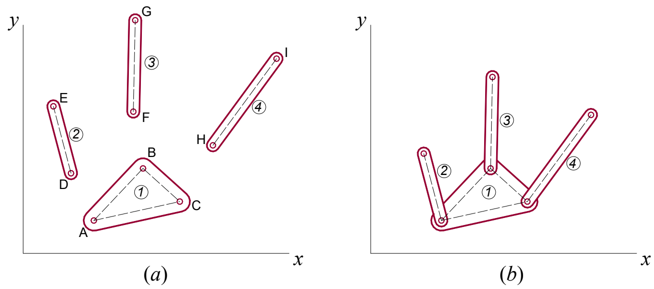

Figura 2.12 Sistema original em "a" e montagem final em "b".

Referências Bibliográficas

ERDMAN, A. G.; SANDOR, G. N. Mechanism design: analysis and synthesis. 2.ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991. Volume I, 631p.

HARTENBERG, R. S.; DENAVITT, J. Kinematic Synthesis of Linkages. New York: McGraw-Hill Book Company, 1964. 435p

HUNT, K. H. Kinematics geometry of mechanisms. Great Britain: Oxford University Press, 1978. 464p.

MABIE, H. H.; OCVIRK, F. W. Mecanismos. 2.ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1980. 298p.

NORTON, R. L. Design of machinery: an introduction to the synthesis an analysis of mechanisms and machines, Singapore: McGraw-Hill Book Company, 1992. 716p.