

CAPÍTULO 7

Cadeias com Múltiplos Graus de Liberdade

Em princípio as cadeias cinemáticas com múltiplos graus de liberdade não seriam de interesse devido ao fato de não podermos determinar a configuração total da cadeia a partir do movimento de uma barra e, conseqüentemente suas velocidades ou acelerações. No entanto estas cadeias podem se mostrar muito interessantes, podendo ser objeto de análise, se considerarmos conhecidos os deslocamentos, velocidades e acelerações para uma quantidade de barras igual ao número de graus de liberdade. Na prática isto significa designar motores, ou qualquer tipo de mobilidade previamente definida, para cada uma destas barras em número igual à quantidade de graus de liberdade.

Desta forma a cadeia poderá ser analisada como se fosse uma cadeia imposta, visto que cada variável secundária ficará em função de “ f ” variáveis principais e não de apenas uma só, onde “ f ” é a quantidade de graus de liberdade do sistema, sendo assim, poderemos montar um sistema de equações de restrição com o número de incógnitas igual ao número de equações, permitindo que possamos solucionar o sistema, em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações.

Saiba Mais

Se forem colocados “motores” em quantidade superior ao número de graus de liberdade, o mecanismo fica impossibilitado de ter movimento e a cadeia será dita inconsistente mecanicamente.

Vamos inicialmente analisar uma cadeia de cinco barras e com dois graus de liberdade, que é na verdade um misto de quadrilátero articulado com Biela Manivela, figura 7.1, por ser esta a cadeia não imposta mais simples que existe para efeito da determinação das equações. Logo a seguir iremos generalizar o procedimento para cadeias não impostas contendo um número qualquer de barras.

7.1. Cadeia com Dois Graus de Liberdade

Análise de Posição

Seja a composição de vetores mostrada na figura 7.1b para o mecanismo 7.1a. Podemos então escrever a seguinte equação vetorial:

$$\vec{a} + \vec{x} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0} \quad (7.1)$$

Com já sugere a figura 7.1a, vamos utilizar, para este mecanismo, o seguinte sistema de coordenadas generalizadas:

$$(\theta_1, \theta_2, \varphi, x) \quad (7.2)$$

Pelo fato de a cadeia ter dois graus de liberdade, a quantidade de coordenadas principais terá que ser duas, fica claro, então, que as coordenadas θ_1 e θ_2 são as coordenadas principais, pelo fato de serem as primeiras na ordem do sistema, e portanto conhecidas, bem como suporemos conhecidas doravante as suas primeiras e segundas derivadas no tempo, denotadas aqui por $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ e $\ddot{\theta}_2$.

Decompondo os vetores da figura 7.1b segundo as direções x e y , iremos obter o sistema de equações não lineares, equação (7.3), nas incógnitas φ e x , uma vez que estamos considerando conhecidos θ_1 e θ_2 .

$$\begin{cases} a \cos \theta_1 + x \cos \varphi - b \cos \theta_2 = 0 \\ a \sin \theta_1 + x \sin \varphi - b \sin \theta_2 = 0 \end{cases} \quad (7.3)$$

O valor de x pode ser obtido, isolando-se os quadrados de $\cos \varphi$ e $\sin \varphi$ em cada linha e somando-as, após recompor os termos no radical, vamos obter:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2c(b \cos \theta_2 - a \cos \theta_1)} \quad (7.4)$$

Já a solução para o deslocamento angular φ pode ser obtida diretamente a partir da segunda linha de (7.3) pela equação:

$$\varphi = \arctg \left(\frac{b \sin \theta_2 - a \sin \theta_1}{b \cos \theta_2 - a \cos \theta_1 + c} \right) \quad (7.5)$$

Velocidades

Após a aplicação das equações (7.4) e (7.5) podemos considerar conhecidos os deslocamentos e conseqüentemente os valores de φ e x . Derivando-se o sistema de equações (7.3) em relação ao tempo, vamos obter:

$$\begin{cases} -a\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{x} \cos \varphi - x\dot{\varphi} \sin \varphi + b\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 = 0 \\ a\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \dot{x} \sin \varphi + x\dot{\varphi} \cos \varphi - b\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 = 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

E o sistema assim obtido pode ser rearrumado como na equação (7.7):

$$\begin{cases} (\cos \varphi)\dot{x} - (x \sin \varphi)\dot{\varphi} = a\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - b\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ (\sin \varphi)\dot{x} + (x \cos \varphi)\dot{\varphi} = -a\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + b\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \end{cases} \quad (7.7)$$

Ficando bem claro que o mesmo é linear nas incógnitas $\dot{\varphi}$ e \dot{x} . Tendo ele

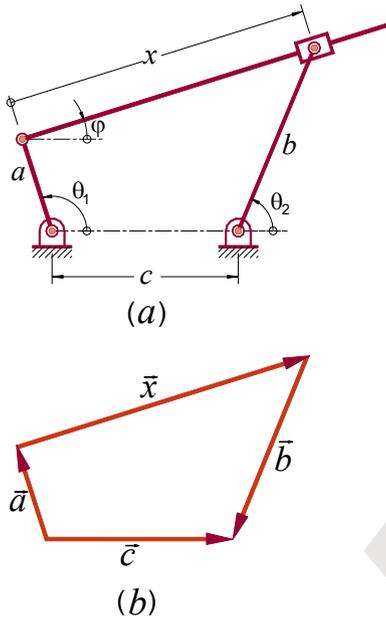


Figura 7.1 Mecanismo composto de Biela Manivela com quadrilátero articulado em (a) e uma das possíveis composições vetoriais em (b).

duas equações, podemos resolver facilmente, obtendo:

$$\begin{cases} \dot{x} = -a\dot{\theta}_1 \sin(\varphi - \theta_1) + b\dot{\theta}_2 \sin(\varphi - \theta_2) \\ \dot{\varphi} = -\frac{a}{x}\dot{\theta}_1 \cos(\varphi - \theta_1) + \frac{b}{x}\dot{\theta}_2 \cos(\varphi - \theta_2) \end{cases} \quad (7.8)$$

Observe-se que as soluções sempre ficam em função das duas coordenadas principais, θ_1 e θ_2 , e suas derivadas no tempo.

Acelerações

Agora vamos derivar, mais uma vez em relação ao tempo, as duas expressões na equação (7.8), obtendo inicialmente :

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} = & \frac{a}{x^2}\dot{x}\dot{\theta}_1 \cos(\varphi - \theta_1) - \frac{a}{x}\ddot{\theta}_1 \cos(\varphi - \theta_1) + \frac{a}{x}\dot{\theta}_1(\dot{\varphi} - \dot{\theta}_1) \sin(\varphi - \theta_1) + \\ & - \frac{b}{x^2}\dot{x}\dot{\theta}_2 \cos(\varphi - \theta_2) + \frac{b}{x}\ddot{\theta}_2 \cos(\varphi - \theta_2) - \frac{b}{x}\dot{\theta}_2(\dot{\varphi} - \dot{\theta}_2) \sin(\varphi - \theta_2) \end{aligned} \quad (7.9)$$

que, após aplicada uma fatoração, vai nos fornecer o resultado final em (7.10):

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} = & -\frac{a}{x}\ddot{\theta}_1 \cos(\varphi - \theta_1) + \frac{b}{x}\ddot{\theta}_2 \cos(\varphi - \theta_2) - \frac{a}{x}\dot{\theta}_1^2 \sin(\varphi - \theta_1) + \frac{b}{x}\dot{\theta}_2^2 \sin(\varphi - \theta_2) + \\ & \frac{\dot{\varphi}}{x} [a\dot{\theta}_1 \sin(\varphi - \theta_1) - b\dot{\theta}_2 \sin(\varphi - \theta_2)] + \frac{\dot{x}}{x^2} [a\dot{\theta}_1 \cos(\varphi - \theta_1) - b\dot{\theta}_2 \cos(\varphi - \theta_2)] \end{aligned} \quad (7.10)$$

E por fim:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & -a\ddot{\theta}_1 \sin(\varphi - \theta_1) - a\dot{\theta}_1(\dot{\varphi} - \dot{\theta}_1) \cos(\varphi - \theta_1) + \\ & b\ddot{\theta}_2 \sin(\varphi - \theta_2) + b\dot{\theta}_2(\dot{\varphi} - \dot{\theta}_2) \cos(\varphi - \theta_2) \end{aligned} \quad (7.11)$$

que fornece, após a fatoração:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & -a\ddot{\theta}_1 \sin(\varphi - \theta_1) + b\ddot{\theta}_2 \sin(\varphi - \theta_2) + a\dot{\theta}_1^2 \cos(\varphi - \theta_1) + \\ & - b\dot{\theta}_2^2 \cos(\varphi - \theta_2) - \dot{\varphi} [a\dot{\theta}_1 \cos(\varphi - \theta_1) - b\dot{\theta}_2 \cos(\varphi - \theta_2)] \end{aligned} \quad (7.12)$$

Substituição Numérica

Considerando-se uma velocidade angular constante e unitária para as duas coordenadas principais, como também acelerações constantes e unitárias à estas e fornecendo valores apropriados às barras a , b e c foi possível se levantar, em separado para que não tivéssemos figuras muito complexas, os gráficos mostrados nas figuras 7.2, deslocamentos, 7.3, velocidades e 7.4, acelerações.

Observe-se ainda que em cada um deles, se fixarmos um valor para θ_1 podemos acompanhar a curva de variação de θ_2 e vice-versa. Isto permite notar a semelhança com os gráficos de deslocamento, velocidade e aceleração do segundo problema resolvido no capítulo anterior, que seria o caso de fixarmos aqui θ_2 em zero em todos os gráficos.

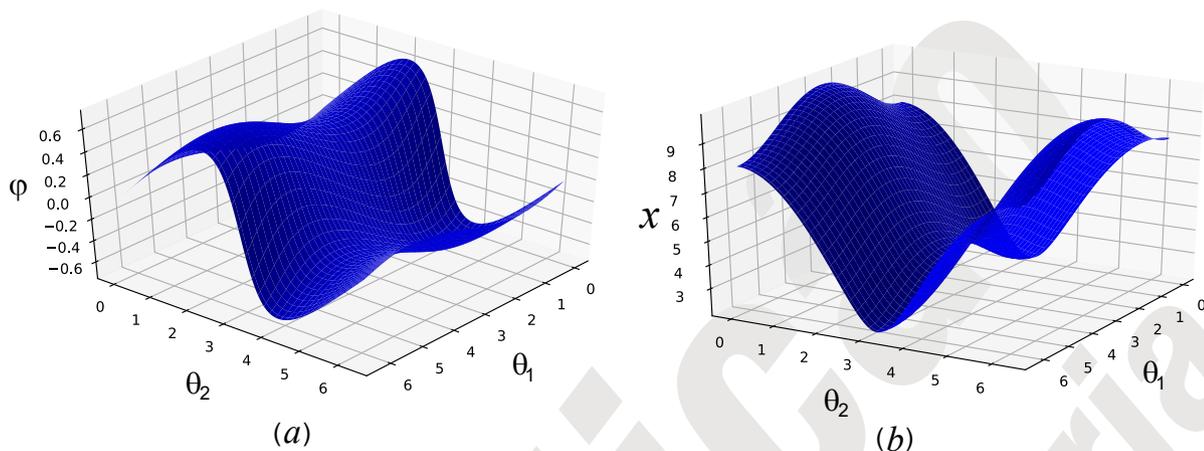


Figura 7.2 Gráficos para o deslocamento angular ϕ em (a) e deslocamento linear x em (b).

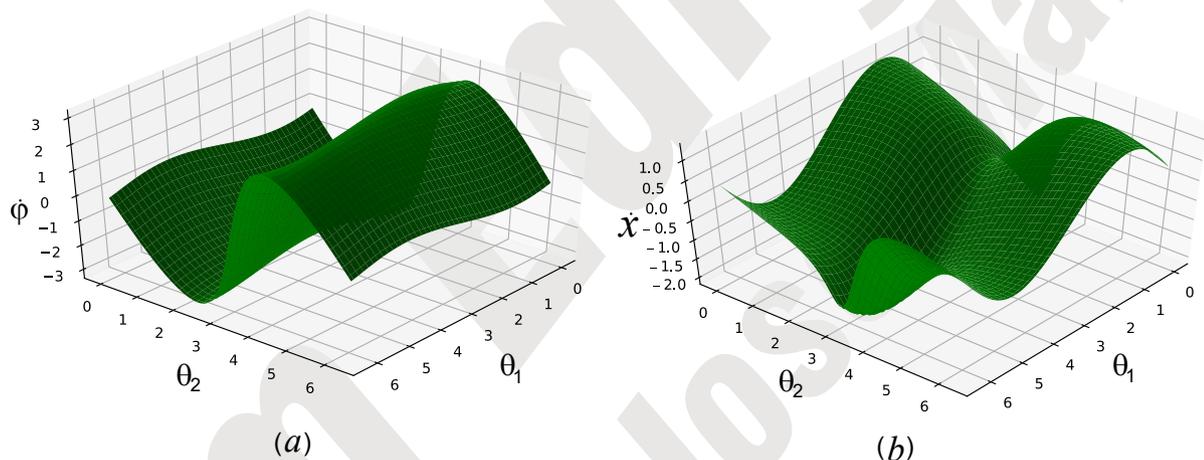


Figura 7.3 Gráficos para a velocidade angular $\dot{\phi}$ em (a) e velocidade linear \dot{x} em (b).

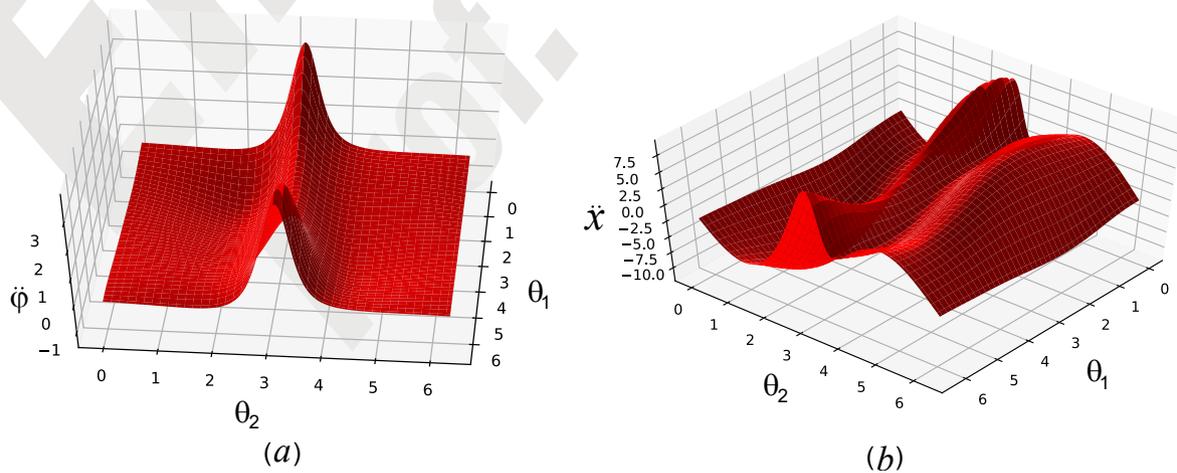


Figura 7.4 Gráficos para a aceleração angular $\ddot{\phi}$ em (a) e aceleração linear \ddot{x} em (b).

7.2. Caso geral

O método de resolução usado para obter as equações de velocidade e aceleração no problema anterior é muito ineficaz para ser aplicado em cadeias não impostas, mais complexas, devido ao fato de termos que calcular várias derivadas totais. Vamos então como feito no capítulo 6, desenvolver uma solução mais geral com base em coeficientes de velocidade e aceleração para cadeias com múltiplos graus de liberdade.

Generalização

Como dito, vamos determinar as expressões gerais para os deslocamentos, velocidades e acelerações para as cadeias impostas, buscando uma abstração, no sentido de trabalharmos com os coeficientes de velocidade e aceleração, como visto no capítulo 5. Tendo no entanto o cuidado de verificar que as definições para estes coeficientes são diferentes para o caso de cadeias com múltiplos graus de liberdade.

Deslocamentos

Seja então uma cadeia cinemática qualquer, com m graus de liberdade e $m + n + 1$ barras, onde m será o número de barras independentes (que recebem movimento exterior) ou principais na cadeia e n será o número de barras dependentes ou secundárias na cadeia. Desta forma, o sistema de coordenadas generalizadas será:

$$(q_1, q_2, \dots, q_m, s_1, s_2, \dots, s_n) \quad (7.13)$$

Havendo então n barras dependentes, estas correspondentes as coordenadas s_i , $i = 1, \dots, n$, neste sistema de coordenadas generalizadas, podemos compor um sistema com “ n ” equações como indicado na equação (7.14) logo a seguir.

$$\begin{aligned} f_1(q_1, q_2, \dots, q_m, s_1, s_2, \dots, s_n) &= 0 \\ f_2(q_1, q_2, \dots, q_m, s_1, s_2, \dots, s_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(q_1, q_2, \dots, q_m, s_1, s_2, \dots, s_n) &= 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

Se consideramos que as coordenadas principais q_1, \dots, q_m são conhecidas, o sistema terá então n incógnitas e, apesar de não ser linear nas variáveis secundárias (s_1, \dots, s_n) terá sempre solução, mesmo que de forma numérica em alguns casos.

Fique Ligado

O sistema (7.14) só seria linear nas variáveis secundárias se todos os pares cinemáticos fossem do tipo prismático, e isto, sabemos ser impossível em cadeias planas.

Então, a partir da solução da equação (7.14) obteremos todos os deslocamentos $s_i = s_i(q_1, \dots, q_m)$, para $i = 1, \dots, n$.

Velocidades

Devido ao fato de o sistema (7.14) conter mais de uma coordenada principal, não podemos, como no caso de cadeias impostas, derivar nestas coordenadas para obter diretamente os coeficientes de velocidade, visto que estas são independentes entre si, porém isto será sanado mais adiante pela separação de cada termo associado com a sua correspondente variável principal, por ora vamos derivá-lo em relação ao tempo, equação (7.15) a seguir.

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial q_m} \frac{dq_m}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial s_1} \frac{ds_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial s_2} \frac{ds_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \frac{ds_n}{dt} = 0 \\ \frac{df_2}{dt} &= \frac{\partial f_2}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial q_m} \frac{dq_m}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial s_1} \frac{ds_1}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial s_2} \frac{ds_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \frac{ds_n}{dt} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{df_n}{dt} &= \frac{\partial f_n}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial q_m} \frac{dq_m}{dt} + \frac{\partial f_n}{\partial s_1} \frac{ds_1}{dt} + \frac{\partial f_n}{\partial s_2} \frac{ds_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \frac{ds_n}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (7.15)$$

Notando que as derivadas totais das variáveis principais e secundárias irão corresponder às respectivas velocidades. As equações em (7.15) podem ainda ser colocadas sob forma matricial:

$$\dot{q}_1 \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q_1} \end{Bmatrix} + \dots + \dot{q}_m \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q_m} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \frac{\partial f_n}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \vdots \\ \dot{s}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.16)$$

Para simplificação de uso vamos dar nomes às matrizes:

$$\underset{\approx}{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \frac{\partial f_n}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{F}_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial q_1} \\ \frac{\partial f_i}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial q_m} \end{Bmatrix}, i = 1 \dots m \quad \underset{\sim}{S} = \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \vdots \\ \dot{s}_n \end{Bmatrix} \quad (7.17)$$

Invertendo a matriz $\underset{\approx}{J}$ e reajustando a equação (7.16), com esta nomenclatura, vamos ter:

$$\underset{\sim}{S} = \dot{q}_1 (-\underset{\approx}{J}^{-1} \underset{\sim}{F}_1) + \dot{q}_2 (-\underset{\approx}{J}^{-1} \underset{\sim}{F}_2) + \dots + \dot{q}_m (-\underset{\approx}{J}^{-1} \underset{\sim}{F}_m) \quad (7.18)$$

Fazendo ainda:

$$\underset{\sim}{K}_i = \begin{Bmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ \vdots \\ k_{in} \end{Bmatrix} = -\underset{\approx}{J}^{-1} \underset{\sim}{F}_i, \quad \text{onde} \quad k_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial q_j} \quad (7.19)$$

Perceba, na equação (7.19), que o cálculo da matriz $\underset{\sim}{K}_i$ deve ser efetuado sempre por $-\underset{\approx}{J}^{-1} \underset{\sim}{F}_i$, salvo em situações onde as derivadas parciais sejam imediatas. Aplicando então (7.19) em (7.18) vamos obter finalmente:

$$\underset{\sim}{S} = \dot{q}_1 \underset{\sim}{K}_1 + \dot{q}_2 \underset{\sim}{K}_2 + \dots + \dot{q}_m \underset{\sim}{K}_m \quad (7.20)$$

ou:

$$\dot{\tilde{S}} = \sum_{i=1}^m \tilde{K}_i \dot{q}_i \quad (7.21)$$

para solução das velocidades de cada barra secundária em função das velocidades principais.

Acelerações

Derivando diretamente a equação (7.21) em relação ao tempo, vamos obter:

$$\ddot{\tilde{S}} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{d\tilde{K}_i}{dt} \dot{q}_i + \tilde{K}_i \ddot{q}_i \right) \quad (7.22)$$

Percebendo que \tilde{K}_i é função das variáveis principais e também das secundárias, a diferencial total do primeiro termo, dentro do somatório, pode ser desenvolvida como na equação (7.23).

$$\frac{d\tilde{K}_i}{dt} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \tilde{K}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{K}_i}{\partial s_k} \dot{s}_k \quad (7.23)$$

E, como \tilde{K}_i representa uma matriz coluna de n linhas, estas duas diferenciais parciais tomam a forma:

$$\frac{\partial \tilde{K}_i}{\partial q_j} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial k_{i1}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial k_{i2}}{\partial q_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial k_{in}}{\partial q_j} \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial \tilde{K}_i}{\partial s_k} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial k_{i1}}{\partial s_k} \\ \frac{\partial k_{i2}}{\partial s_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial k_{in}}{\partial s_k} \end{Bmatrix} \quad (7.24)$$

E a equação (7.23) substituída em (7.22) vai fornecer:

$$\ddot{\tilde{S}} = \sum_{i=1}^m \left[\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial \tilde{K}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{K}_i}{\partial s_k} \dot{s}_k \right) \dot{q}_i + \tilde{K}_i \ddot{q}_i \right] \quad (7.25)$$

Se definirmos \tilde{L}_i como na equação (7.26), este será chamado coeficiente da aceleração na variável principal “ i ”.

$$\tilde{L}_i = \frac{1}{\dot{q}_i} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial \tilde{K}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{K}_i}{\partial s_k} \dot{s}_k \right) \quad (7.26)$$

Poderemos agora ter a equação definitiva para a aceleração, em função dos coeficientes de velocidade e aceleração em cada variável principal, pela equação (7.27).

$$\ddot{\tilde{S}} = \sum_{i=1}^m \left(\ddot{q}_i \tilde{K}_i + \dot{q}_i^2 \tilde{L}_i \right) \quad (7.27)$$

7.3. Cadeias com Dois Graus de Liberdade

Didaticamente, vamos nos envolver, em muitos casos com cadeias de cinco barras com dois graus de liberdade, como foi o caso do exemplo apresentado no início deste capítulo.

Para esta situação, vamos ter, a partir da equação (7.26):

$$\tilde{L}_1 = \frac{1}{\dot{q}_1} \left(\frac{\partial \tilde{K}_1}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \tilde{K}_1}{\partial \dot{q}_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \tilde{K}_1}{\partial \dot{s}_1} \dot{s}_1 + \frac{\partial \tilde{K}_1}{\partial \dot{s}_2} \dot{s}_2 \right) \quad (7.28)$$

Que matricialmente toma a forma:

$$\tilde{L}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{11}}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial k_{11}}{\partial \dot{q}_2} \\ \frac{\partial k_{12}}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial k_{12}}{\partial \dot{q}_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{11}}{\partial \dot{s}_1} & \frac{\partial k_{11}}{\partial \dot{s}_2} \\ \frac{\partial k_{12}}{\partial \dot{s}_1} & \frac{\partial k_{12}}{\partial \dot{s}_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix} \quad (7.29)$$

Da mesma forma para \tilde{L}_2 vamos encontrar:

$$\tilde{L}_2 = \frac{1}{\dot{q}_2} \left(\frac{\partial \tilde{K}_2}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \tilde{K}_2}{\partial \dot{q}_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \tilde{K}_2}{\partial \dot{s}_1} \dot{s}_1 + \frac{\partial \tilde{K}_2}{\partial \dot{s}_2} \dot{s}_2 \right) \quad (7.30)$$

Ou:

$$\tilde{L}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{21}}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial k_{21}}{\partial \dot{q}_2} \\ \frac{\partial k_{22}}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial k_{22}}{\partial \dot{q}_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{21}}{\partial \dot{s}_1} & \frac{\partial k_{21}}{\partial \dot{s}_2} \\ \frac{\partial k_{22}}{\partial \dot{s}_1} & \frac{\partial k_{22}}{\partial \dot{s}_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (7.31)$$

Aplicação

De imediato, vamos aplicar estas equações à uma outra inversão do mecanismo composto de biela manivela com quadrilátero articulado, figura 7.5, onde agora as coordenadas principais serão θ da barra que contém o pistão, e x para o pistão respectivamente.

Então, teremos para coordenadas generalizadas deste sistema a equação (7.32) a seguir.

$$(\theta, x, \alpha, \beta) \quad (7.32)$$

E, com já foi feito em vários problemas deste tipo, vamos utilizar a composição de vetores da figura 7.5, e a sua decomposição em x e y , para obter o seguinte sistema de equações de restrição:

$$\begin{cases} x \cos \theta + a \cos \alpha + b \cos \beta - c = 0 \\ x \sin \theta + a \sin \alpha - b \sin \beta = 0 \end{cases} \quad (7.33)$$

Análise de Deslocamentos

Colocando o sistema de equações (7.33) na forma:

$$\begin{cases} a \cos \alpha + b \cos \beta = c - x \cos \theta \\ a \sin \alpha - b \sin \beta = -x \sin \theta \end{cases} \quad (7.34)$$

e comparando agora o sistema (7.34) com o seu equivalente no apêndice B, sistema de equações (B.17), vamos ter:

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{C \pm \sqrt{C^2 + D^2 - F^2}}{D + F} \quad (7.35)$$

e:

$$\beta = 2 \operatorname{arctg} \frac{C \pm \sqrt{C^2 + D^2 - G^2}}{-D + G} \quad (7.36)$$

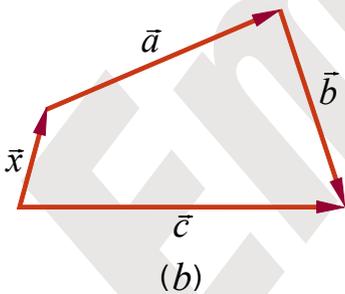
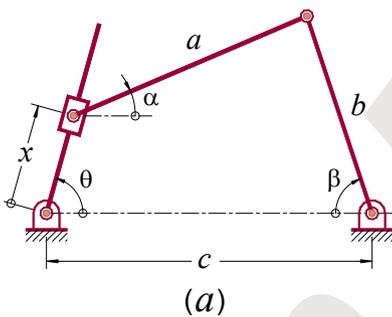


Figura 7.5 Uma outra inversão do mecanismo composto de Biela Manivela com quadrilátero articulado..

onde:

$$\begin{aligned} A &= a \\ B &= b \\ C &= -x \operatorname{sen} \theta \\ D &= c - x \cos \theta \\ F &= \frac{A^2 - B^2 + C^2 + D^2}{2A} \\ F &= \frac{-A^2 + B^2 + C^2 + D^2}{2B} \end{aligned}$$

E note que as soluções ficaram em função das coordenadas principais, uma vez que C e D, nas equações (7.35) e (7.36), são funções de θ e x .

Análise de Velocidades

É imediato que o sistema de equações (7.33), nas variáveis α e β , produz a seguinte matriz jacobiana:

$$\underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} -a \operatorname{sen} \alpha & -b \operatorname{sen} \beta \\ a \cos \alpha & -b \cos \beta \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

E, conseqüentemente, as matrizes coluna da equação (7.8) para \underline{F}_1 e \underline{F}_2 , como definidas na equação (7.17).

$$\underset{\sim}{F}_1 = \begin{Bmatrix} -x \operatorname{sen} \theta \\ x \cos \theta \end{Bmatrix} \quad \underset{\sim}{F}_2 = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \operatorname{sen} \theta \end{Bmatrix} \quad (7.38)$$

Invertendo o Jacobiano em (7.37) e aplicando agora, a equação (7.19), vamos obter:

$$\underset{\sim}{K}_1 = \frac{x}{ab \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \begin{Bmatrix} -b \operatorname{sen}(\beta + \theta) \\ a \operatorname{sen}(\alpha - \theta) \end{Bmatrix} \quad (7.39)$$

e:

$$\underset{\sim}{K}_2 = \frac{1}{ab \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \begin{Bmatrix} b \cos(\beta + \theta) \\ a \cos(\alpha - \theta) \end{Bmatrix} \quad (7.40)$$

que nos fornece, em função de (7.20):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\frac{1}{a \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \left[x \dot{\theta} \operatorname{sen}(\beta + \theta) - \dot{x} \cos(\beta + \theta) \right] \\ \dot{\beta} &= -\frac{1}{b \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \left[x \dot{\theta} \operatorname{sen}(\alpha - \theta) + \dot{x} \cos(\alpha - \theta) \right] \end{aligned} \quad (7.41)$$

Que se traduz nas velocidades finais para as duas coordenadas secundárias em função das velocidades principais.

Obtenção das Acelerações

Denominando $\underset{\sim}{K}_{1q}$ e $\underset{\sim}{K}_{1s}$ a primeira e segunda matriz, respectivamente, da equação (7.29), vamos ter:

$$\underset{\sim}{K}_{1q} = \begin{bmatrix} -\frac{x \cos(\beta + \theta)}{a \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} & -\frac{\operatorname{sen}(\beta + \theta)}{a \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \\ -\frac{x \cos(\alpha - \theta)}{b \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} & \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \theta)}{b \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

e:

$$\underset{\sim}{K}_{1s} = \begin{bmatrix} -\frac{x \cos(\alpha + \beta) \operatorname{sen}(\beta + \theta)}{a \operatorname{sen}^2(\alpha + \beta)} & \frac{x \operatorname{sen}(\alpha - \theta)}{a \operatorname{sen}^2(\alpha + \beta)} \\ \frac{x \operatorname{sen}(\beta + \theta)}{b \operatorname{sen}^2(\alpha + \beta)} & \frac{x \operatorname{sen}(\alpha - \theta) \cos(\alpha + \beta)}{b \operatorname{sen}^2(\alpha + \beta)} \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

Então a equação (7.19), agora toma a forma:

$$\tilde{L}_1 = \tilde{K}_{1q} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{matrix} \right\} + \tilde{K}_{1s} \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \end{matrix} \right\} \quad (7.44)$$

Que por substituição dos valores em (7.42) e (7.43) nos fornece:

$$\tilde{L}_1 = \left\{ \begin{array}{l} x \frac{b\dot{\beta} \frac{\text{sen}(\alpha-\beta)}{\text{sen}(\alpha+\beta)} - \frac{b}{x} \dot{x} \text{sen}(\beta+\theta) - b\dot{\theta} \cos(\beta+\theta) - b\dot{\alpha} \text{sen}(\beta+\theta) \cotg(\alpha+\beta)}{ab\dot{\theta} \text{sen}(\alpha+\beta)} \\ x \frac{\frac{a}{x} \dot{x} \text{sen}(\alpha-\theta) - a\dot{\theta} \cos(\alpha-\theta) + a\dot{\alpha} \frac{\text{sen}(\beta+\theta)}{\text{sen}(\alpha+\beta)} + a\dot{\beta} \text{sen}(\alpha-\theta) \cotg(\alpha+\beta)}{ab\dot{\theta} \text{sen}(\alpha+\beta)} \end{array} \right\} \quad (7.45)$$

Da mesma forma, em relação à segunda coordenada principal:

$$\tilde{K}_{2q} = \begin{bmatrix} -\frac{\text{sen}(\beta+\theta)}{a \text{sen}(\alpha+\beta)} & 0 \\ \frac{\text{sen}(\alpha-\theta)}{b \text{sen}(\alpha+\beta)} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.46)$$

e:

$$\tilde{K}_{2s} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\alpha+\beta) \cos(\beta+\theta)}{a \text{sen}^2(\alpha+\beta)} & \frac{\cos(\alpha-\theta)}{a \text{sen}^2(\alpha+\beta)} \\ \frac{\cos(\beta+\theta)}{b \text{sen}^2(\alpha+\beta)} & \frac{\cos(\alpha-\theta) \cos(\alpha+\beta)}{b \text{sen}^2(\alpha+\beta)} \end{bmatrix} \quad (7.47)$$

e, com:

$$\tilde{L}_2 = \tilde{K}_{2q} \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \\ 1 \end{matrix} \right\} + \tilde{K}_{2s} \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{x} \end{matrix} \right\} \quad (7.48)$$

vamos ter para o \tilde{L}_2 final:

$$\tilde{L}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{\beta} \cos(\alpha-\theta) - \dot{\theta} \text{sen}(\beta+\theta) + \dot{\alpha} \cos(\alpha+\beta) \cos(\beta+\theta)}{a\dot{x} \text{sen}^2(\alpha+\beta)} \\ \frac{\dot{\alpha} \cos(\beta+\theta) + \dot{\theta} \text{sen}(\alpha-\theta) + \dot{\beta} \cos(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\theta)}{a\dot{x} \text{sen}^2(\alpha+\beta)} \end{array} \right\} \quad (7.49)$$

E as acelerações podem ser obtidas agora aplicando-se a equação (7.27).

$$\tilde{\ddot{S}} = \tilde{\ddot{\theta}} \tilde{K}_1 + \tilde{\ddot{x}} \tilde{K}_2 + \dot{\theta}^2 \tilde{L}_1 + \dot{x}^2 \tilde{L}_2 \quad (7.50)$$

7.4. Cadeias com Três Graus de Liberdade

Didaticamente também teremos alguns casos com cadeias que tenham três graus de liberdade, normalmente de seis barras ou mais e na prática industrial isto também é bem comum. Vejamos então a seguir que o equacionamento deste tipo de cadeia, bem como a sua resolução, é bastante simples e pode ser feito de forma analítica.

Dado que a obtenção das velocidades não tem nenhum problema, sendo o bastante aplicar as equações (7.19) e (7.21), vamos nos ater ao cálculo das acelerações com base na expressão (7.26) e (7.27).

Então, matricialmente, para este caso, a equação (7.26) vai tomar a forma:

$$\tilde{L}_1 = \frac{1}{\dot{q}_1} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial k_{11}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{11}}{\partial q_2} & \frac{\partial k_{11}}{\partial q_3} \\ \frac{\partial k_{12}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{12}}{\partial q_2} & \frac{\partial k_{12}}{\partial q_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{11}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{11}}{\partial s_2} \\ \frac{\partial k_{12}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{12}}{\partial s_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix} \right) \quad (7.51)$$

E assim, sucessivamente:

$$\tilde{L}_2 = \frac{1}{\dot{q}_2} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial k_{21}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{21}}{\partial q_2} & \frac{\partial k_{21}}{\partial q_3} \\ \frac{\partial k_{22}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{22}}{\partial q_2} & \frac{\partial k_{22}}{\partial q_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{21}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{21}}{\partial s_2} \\ \frac{\partial k_{22}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{22}}{\partial s_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix} \right) \quad (7.52)$$

$$\tilde{L}_3 = \frac{1}{\dot{q}_3} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial k_{31}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{31}}{\partial q_2} & \frac{\partial k_{31}}{\partial q_3} \\ \frac{\partial k_{32}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{32}}{\partial q_2} & \frac{\partial k_{32}}{\partial q_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{31}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{31}}{\partial s_2} \\ \frac{\partial k_{32}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{32}}{\partial s_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix} \right) \quad (7.53)$$

Aplicação

Vejamos a cadeia de sete barras e com três graus de liberdade, mostrada na figura 7.6 ao lado, onde teremos θ_1, θ_2 e x para coordenadas principais, sendo φ e δ as coordenadas secundárias.

Para este caso, o sistema de coordenadas generalizadas será $(\theta_1, \theta_2, x, \varphi, \delta)$ e o sistema de equações de restrição pode ser escrito:

$$\begin{cases} a \cos \theta_1 + b \cos \varphi + x \cos \delta - c \cos \theta_2 - d = 0 \\ a \sin \theta_1 + b \sin \varphi + x \sin \delta - c \sin \theta_2 = 0 \end{cases} \quad (7.54)$$

Nas incógnitas φ e δ , o sistema de equações de restrição (7.54) toma a forma:

$$\begin{cases} b \cos \varphi + x \cos \delta = c \cos \theta_2 - a \cos \theta_1 + d \\ b \sin \varphi + x \sin \delta = c \sin \theta_2 - a \sin \theta_1 \end{cases} \quad (7.55)$$

Este sistema é idêntico, em termos de solução, ao sistema da equação (7.34), deste capítulo, tendo a sua solução dada pelas equações (B.14) e (B.18) no apêndice B.

Velocidades

Da equação (7.54), vamos obter o jacobiano apresentado abaixo.

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} -b \sin \varphi & -x \sin \delta \\ b \cos \varphi & x \cos \delta \end{bmatrix} \quad (7.56)$$

O Jacobiano, nas coordenadas principais, vai fornecer as três seguintes matrizes coluna:

$$\tilde{F}_1 = \begin{Bmatrix} -a \sin \theta_1 \\ a \cos \theta_1 \end{Bmatrix}, \quad \tilde{F}_2 = \begin{Bmatrix} c \sin \theta_2 \\ -c \cos \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{F}_3 = \begin{Bmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \end{Bmatrix}, \quad (7.57)$$

Desta forma, vamos obter, para as matrizes dos coeficientes de velocidades:

$$\tilde{K}_1 = -\frac{1}{b \sin(\delta - \varphi)} \begin{Bmatrix} a \sin(\delta - \theta_1) \\ \frac{ab}{x} \sin(\theta_1 - \varphi) \end{Bmatrix} \quad (7.58)$$

$$\tilde{K}_2 = \frac{1}{b \sin(\delta - \varphi)} \begin{Bmatrix} c \sin(\delta - \theta_2) \\ \frac{cb}{x} \sin(\theta_2 - \varphi) \end{Bmatrix} \quad (7.59)$$

$$\tilde{K}_3 = \frac{1}{b \sin(\delta - \varphi)} \begin{Bmatrix} -1 \\ \frac{b \cos(\delta - \varphi)}{x} \end{Bmatrix} \quad (7.60)$$

Com isto, aplicando a equação (7.20) convenientemente às linhas de cada matriz, obtemos as velocidades:

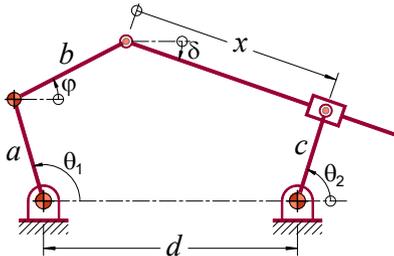


Figura 7.6 Cadeia cinemática com sete barras e três graus de liberdade.

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{b \sin(\delta - \varphi)} [-\dot{\theta}_1 a \sin(\delta - \theta_1) + \dot{\theta}_2 c \sin(\delta - \theta_2) - \dot{x}] \quad (7.61)$$

$$\dot{\delta} = \frac{1}{b \sin(\delta - \varphi)} [-\dot{\theta}_1 \frac{ab}{x} \sin(\theta_1 - \varphi) + \dot{\theta}_2 \frac{cb}{x} \sin(\theta_2 - \varphi) + \frac{\dot{x}b}{x} \cos(\delta - \varphi)] \quad (7.62)$$

Acelerações

Devido ao tamanho das expressões matriciais, não iremos colocar aqui as expressões para as acelerações, mas deixamos o Script, em Python, ao final do item 7.5, a seguir, para que o aluno possa obtê-las pela impressão da variável Sa.

7.5. Implementação em Python

Como visto para as cadeias impostas, aqui também as expressões apresentadas consistem de equações algébricas elementares permitindo então se desenvolver uma implementação computacional com a utilização de aplicativos que foquem em soluções simbólicas e, como já sabemos, para isto temos uma gama imensa que pode ser utilizada, porém como no capítulo anterior o nosso desenvolvimento será em Python devido às facilidades de uso e, principalmente, por ser de uso gratuito e open source, além da imensa facilidade do traçado de gráficos, tão importantes para as nossas aplicações.

Como já foi dito anteriormente, os códigos podem ser submetidos a qualquer interpretador python, mas especificamente eles se adaptam melhor ao IPython, que tenha disponível as bibliotecas NumPy, Matplotlib e SymPy.

Damping de Tela 7.1 Utilização do código fonte para cadeias de cinco barras no site jupyter.org.

Não iremos aqui detalhar cada linha, mas para aqueles que já se familiarizaram com o Python, através dos códigos anteriores, aqui mostrados, cremos que isto será entendido de forma fácil. Àqueles que tiverem necessidade de se aprofundarem ainda mais, podem consultar a vasta gama de informação disponibilizada na internet sobre o assunto.

Plaina Limadora de Sete Barras

Para uma melhor compreensão da colocação dos diversos símbolos, o código abaixo se refere à figura 7.7. Neste problema a barra de entrada contém um atuador hidráulico e pode se distender aumentando ou diminuindo o seu tamanho que é representado pela coordenada z , e se tem $(\theta, z, y, \varphi, \beta, x)$ para o sistema de coordenadas generalizadas, deixando claro que as coordenadas principais são θ , e z .

Código Python para o problema apresentado no item 7.4

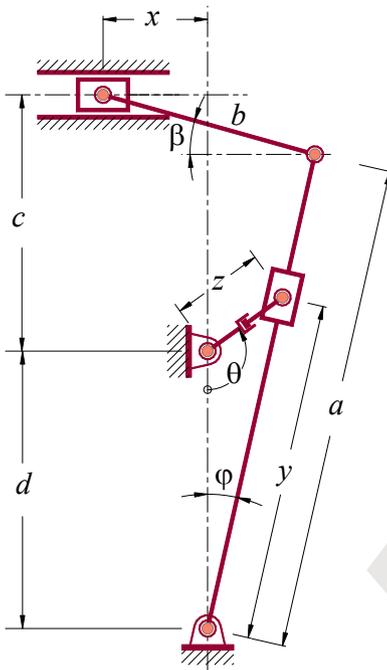


Figura 7.7 Plaina Limadora de sete barras com dois graus de liberdade.

7.4 Exercícios

1. Encontre as equações para velocidade e aceleração (problema mostrado na figura 7.1, das duas variáveis secundárias φ e x aplicando diretamente as equações (7.21) e (7.27).

2. Mostre, para uma cadeia cinemática com dois graus de liberdade, que havendo um relacionamento entre as coordenadas principais, este mecanismo pode ser tratado e equacionado como uma cadeia imposta. Estenda isto para múltiplos graus de liberdade.

Observe:

Nos problemas a seguir, o símbolo \oplus , colocado no par cinemático rotativo, representa um motor ou movimento motriz naquela junta.

3. Para a cadeia cinemática da figura, as coordenadas principais são θ e x , determine os coeficientes da aceleração, L_θ e L_x , fornecendo coordenadas para a barra "b" e para o pistão, ou mais especificamente para a barra que forma par prismático com este.

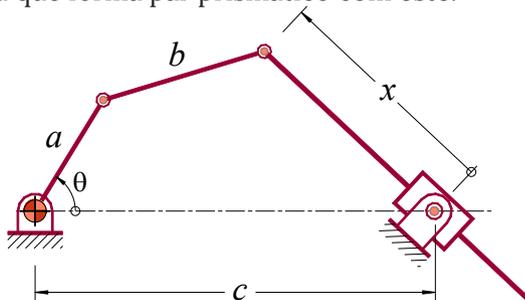


Figura 7.8-3 Quadrilátero biela manivela com dois graus de liberdade, coordenadas principais θ e x .

4. Na cadeia cinemática da figura, as coordenadas principais são θ_1 e θ_2 , determine os deslocamentos e velocidades, em seguida refaça os cálculos e encontre as acelerações, supondo que a velocidade angular da barra "b" seja a mesma da barra "a".

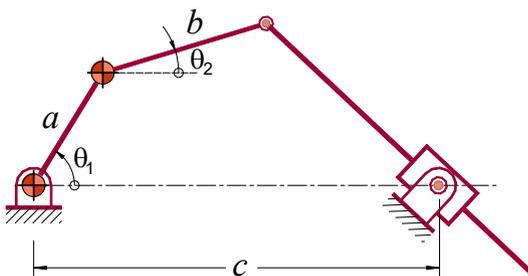


Figura 7.9-4 Quadrilátero biela manivela com dois graus de liberdade, coordenadas principais θ_1 e θ_2 .

5. Na figura mostrada, a cadeia cinemática tem dois graus de liberdade e as coordenadas principais são θ e x , determine os deslocamentos e velocidades para as coordenadas secundárias.

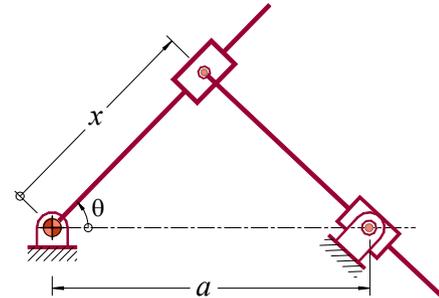


Figura 7.10-5 Cadeia cinemática de dupla biela manivela com dois graus de liberdade.

6. Para a cadeia cinemática dada, sendo θ e x as coordenadas principais, determine o coeficiente da aceleração para a barra da direita.

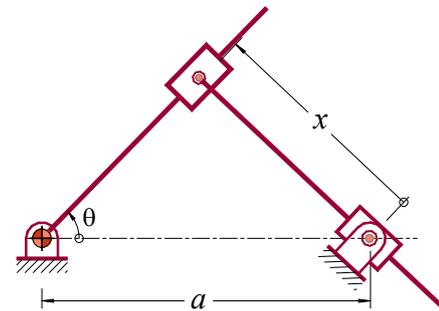


Figura 7.11-6 Cadeia cinemática de dupla biela manivela com dois graus de liberdade.

7. Na cadeia cinemática abaixo, determine as equações de deslocamento e velocidade e calcule a aceleração da barra "b", sabendo que os deslocamentos principais são θ e x .

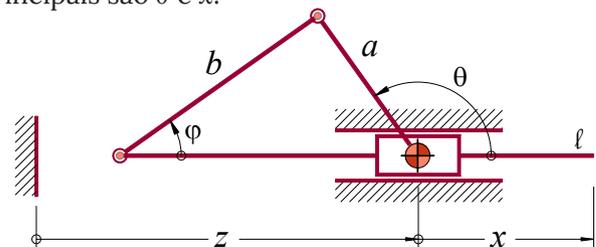


Figura 7.12-7 Cadeia cinemática simulando o mecanismo de agulha com dois graus de liberdade.

8. Na cadeia cinemática abaixo, determine o coeficiente da aceleração, para a coordenada "x", sabendo-se que as coordenadas principais são θ_1 e θ_2 , que a

agulha tem comprimento "l" e que o pistão é fixo.

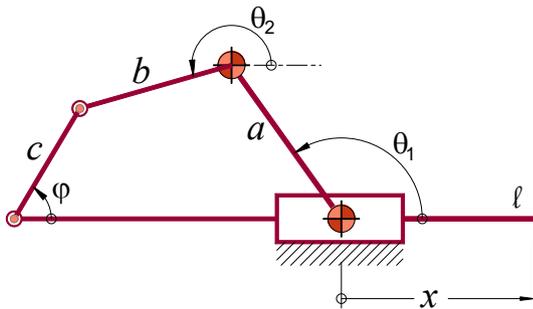


Figura 7.13-8 Cadeia cinemática simulando o mecanismo de agulha no estilo quadrilátero articulado com dois graus de liberdade.

9. Na figura, os deslocamentos principais são θ e x . Determine o deslocamento para a barra "b" e os coeficientes de velocidade e aceleração apenas na variável x .

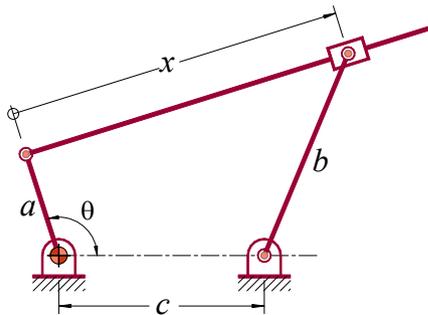


Figura 7.14-9 Cadeia cinemática do exemplo inicial com outras coordenadas principais.

10. Na figura os deslocamentos principais são θ_1 e θ_2 . Determine o deslocamento para a barra "a" e os coeficientes de velocidade para a barra "a" e para o pistão.

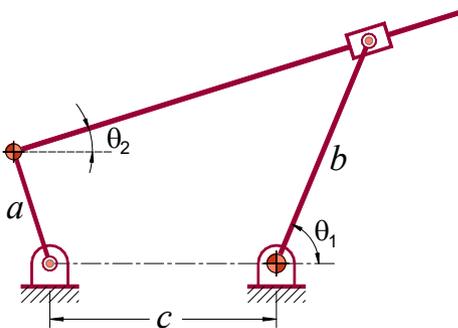


Figura 7.15-10 Cadeia cinemática do exemplo inicial com outras coordenadas principais.

11. Considerando as barras "a" e "b" como principais, obtenha o deslocamento, velocidade e aceleração para o pistão. Com base nas expressões obtidas, qual o valor da aceleração, do pistão, quando a velocidade

angular da barra "a" for o dobro da velocidade angular da barra "b".

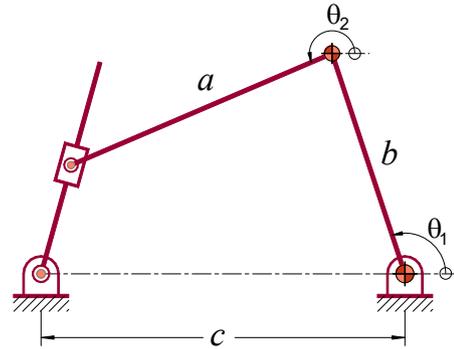


Figura 7.16-11 Cadeia cinemática mista de cinco barras.

12. Considerando as barras "a" e "x" como coordenadas principais, obtenha o deslocamento, velocidade e aceleração para a barra "a". Com base nas expressões obtidas, qual o valor da aceleração, da barra "a", quando a velocidade angular da barra "b" for o dobro da velocidade linear do pistão.

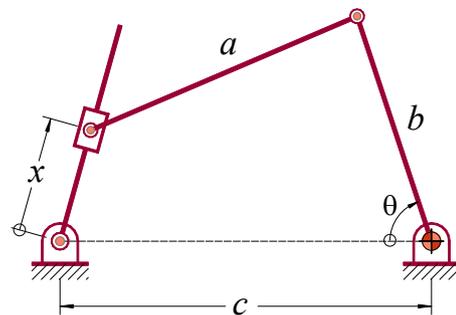


Figura 7.17-12 Cadeia cinemática mista de cinco barras com duas entradas.

13. Na cadeia de cinco barras mostrada na figura, considerando θ_1 e θ_2 para coordenadas principais, calcule os coeficientes de velocidade para as barras "c" e "d" e determine também o coeficiente da aceleração da barra "b" na coordenada θ_1 .

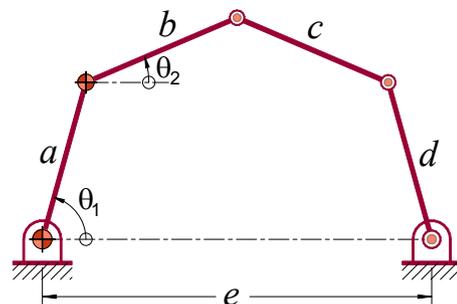


Figura 7.18-13 Cadeia cinemática com cinco barras binárias e com duas barras principais.

14. Na cadeia cinemática mostrada, as barras principais são “a” e “d”, determine as velocidades e acelerações para as outras barras.

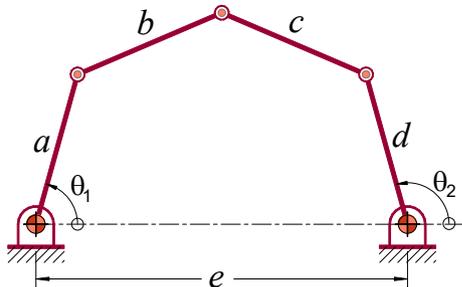


Figura 7.19-14 Cadeia cinemática com cinco barras binárias e com duas barras principais opostas.

15. Na cadeia cinemática da figura, considere que a barra “b” tem o dobro da rotação da barra “a”, estas duas sendo principais, determine, então, as velocidades e acelerações da barra “c” e do pistão. Analise a velocidade do pistão para o caso em que as velocidades angulares das barras “a” e “b” sejam idênticas.

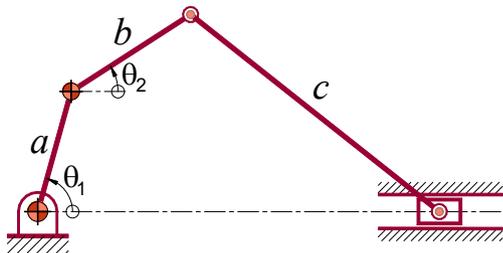


Figura 7.20-15 Cadeia do tipo biela manivela com acoplador intermediário.

16. Na cadeia cinemática mostrada abaixo, as coordenadas principais são “ θ ” e “ x ”, determine o deslocamento, velocidade e aceleração para a barra “c”. Quando a velocidade do pistão for nula, compare a situação com o caso do quadrilátero articulado.

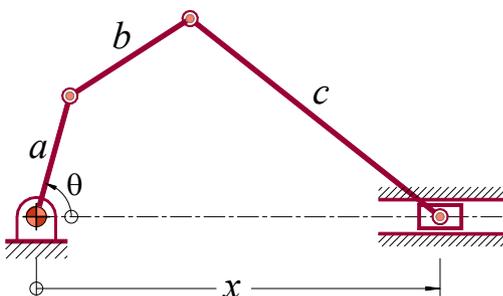


Figura 7.21-16 Cadeia cinemática do tipo biela manivela com acoplador intermediário.

17. A cadeia cinemática da figura tem três graus de liberdade e recebe para coordenadas principais as variáveis θ_1 , θ_2 e x , com isto, tornando-se perfeitamente viável para mecanismo. Determine inicialmente todos os coeficientes de velocidade e o coeficiente da aceleração na variável “ x ”. Considere agora θ_1 igual a θ_2 e calcule todas as velocidades.

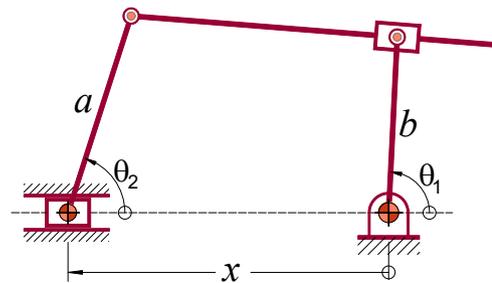


Figura 7.22-17 Cadeia cinemática com três graus de liberdade viabilizado pela introdução de duas coordenadas principais extras.

18. Para a cadeia cinemática de seis barras da figura calcule inicialmente as velocidades secundárias, considerando que as três velocidades principais são idênticas e, em seguida os coeficientes de velocidade e aceleração na variável principal primeira, supondo que todas as variáveis principais são linearmente independentes.

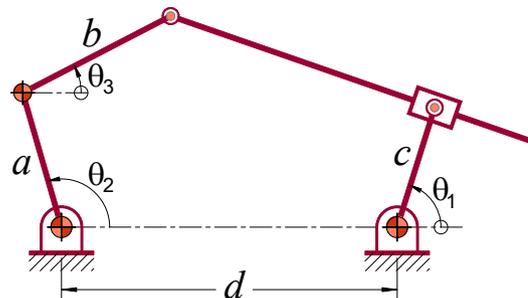


Figura 7.23-18 Cadeia cinemática com as três velocidades iniciais idênticas se transforma em uma cadeia imposta.

19. Para a cadeia cinemática de seis barras da figura a entrada se faz pelas barras “a” “b” e “d”, calcule inicialmente a velocidade do pistão para esta situação e em seguida recalcule-a considerando nula a velocidade relativa entre a barra “b” e a barra “a”.

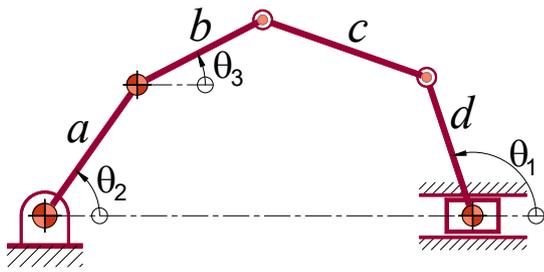


Figura 7.24-19 Cadeia cinemática de seis barras com três coordenadas principais.

20. A plaina limadora da figura dispõe de uma coordenada principal “y” extra, com a finalidade de acelerar mais ainda o torpedo no movimento de corte e retardá-lo no movimento de retorno. Nestas condições, calcule os coeficientes de velocidade e aceleração do torpedo. Refaça os cálculos considerando uma relação constante entre a velocidade angular “ θ ” e a velocidade linear “y”.

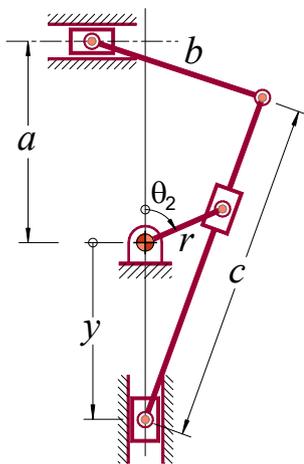


Figura 7.25-20 Plaina limadora com dois graus de liberdade e uma segunda coordenada principal para efeito de aceleração do torpedo.

21. Para a cadeia cinemática de sete barras mostrada na figura, obtenha todos os coeficientes de velocidade e o coeficiente da aceleração na variável principal θ_1 . Faça estes cálculos com a utilização de algum programa matemático de computador. Refaça os cálculos das velocidades considerando que a velocidade angular da barra “a” seja o dobro da velocidade da barra “c”.

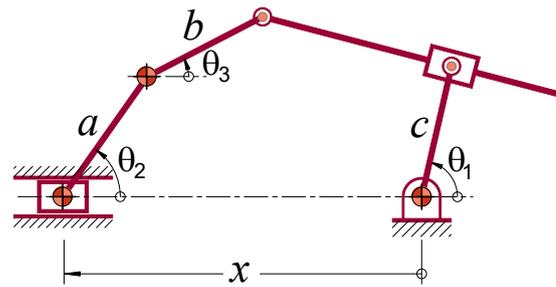


Figura 7.26-21 Cadeia cinemática de sete barras tornando viável com duas coordenadas principais.

22. Na cadeia cinemática de sete barras, as coordenadas principais são θ_1 e θ_2 , sendo $(\theta_1, \theta_2, \varphi, y, \delta, x)$ o sistema de coordenadas generalizadas, determine o coeficiente da aceleração, l_y , para o pistão superior.

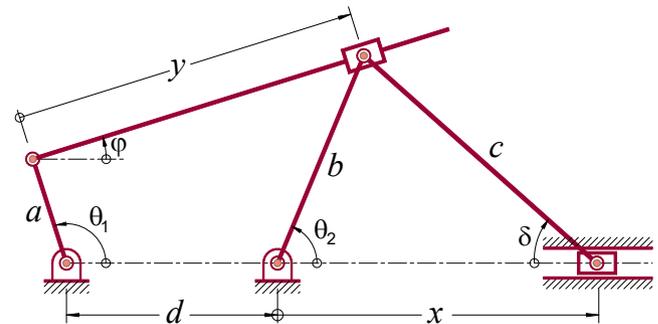


Figura 7.27-22 Cadeia cinemática de sete barras, aceleração do pistão superior.

23. Na cadeia cinemática mostrada, as coordenadas principais são θ_1 e θ_2 , sendo $(\theta_1, \theta_2, \delta, y, \varphi, x)$ o sistema de coordenadas generalizadas, determine o coeficiente da aceleração, l_y , para o pistão da esquerda.

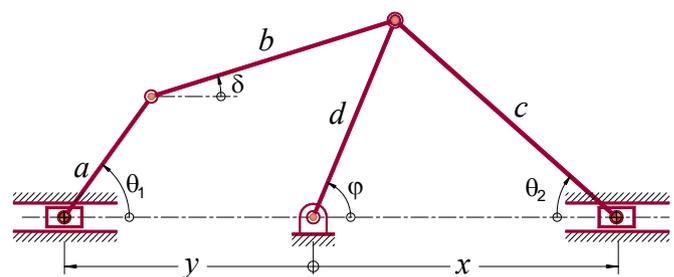


Figura 7.28-23 Cadeia cinemática de sete barras, aceleração do pistão superior.

24. Na cadeia cinemática de sete barras mostrada na figura, as coordenadas principais são θ e z . Determine então o deslocamento e a velocidade angular da barra “b” quando a relação entre “ θ ” e “ z ” for da ordem de 2 rad/mm.

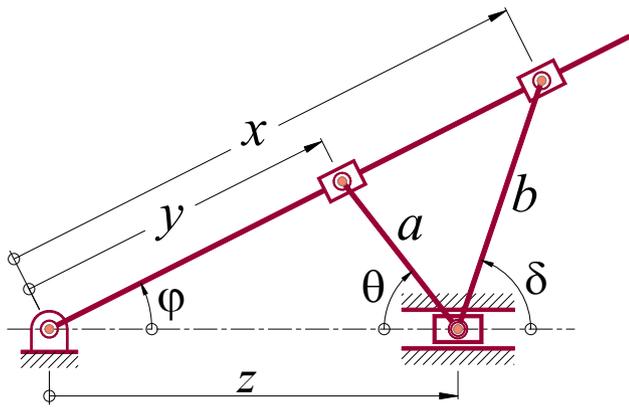


Figura 7.29-24 Cadeia cinemática de sete barras, aceleração do pistão superior.

25. Na cadeia cinemática da figura, as coordenadas principais são θ_1 e θ_2 , obtenha o coeficiente da aceleração para a coordenada “x” na segunda coordenada principal ($l_{\theta_2, x}$).

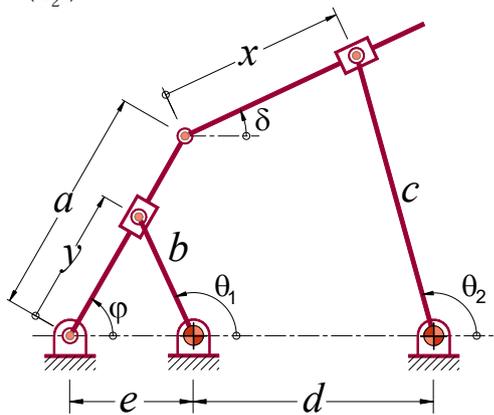


Figura 7.30-25 Cadeia cinemática de sete barras, coeficiente da aceleração dos segundo pistão.

26. Na cadeia da figura, as coordenadas principais são θ_1 e θ_2 , considerando $(\theta_1, \theta_2, \varphi, z, x, y)$ para coordenadas generalizadas, determine a velocidade relativa entre os dois cilindros.

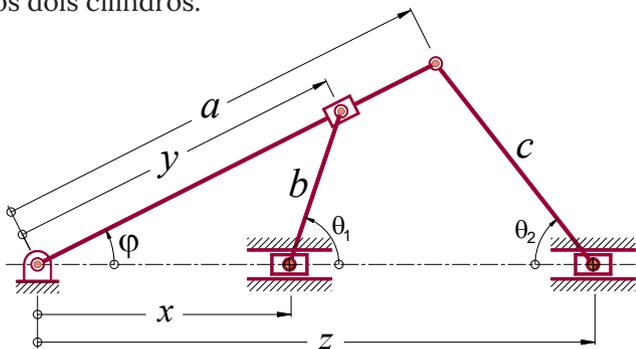


Figura 7.31-26 Cadeia cinemática de sete barras, velocidade relativa entre os dois cilindros.

27. Na cadeia da cinemática figura, as coordenadas principais são θ_1 e θ_2 , considerando $(\theta_1, \theta_2, \gamma, \varphi, \delta, x)$ para coordenadas generalizadas, determine as velocidades da barra “e” e do pistão. Codificando o problema no Python, determine também estas acelerações.

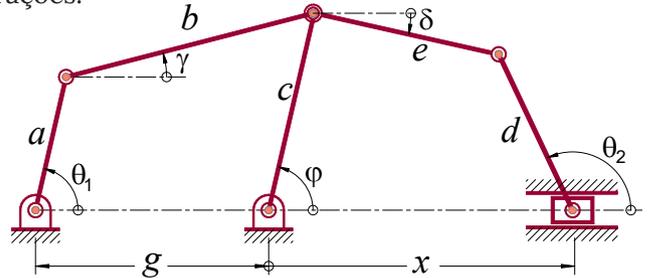


Figura 7.32-27 Cadeia de sete barras, obtenção das acelerações pelo Python.

28. Na cadeia cinemática da figura, as coordenadas principais são θ_1 e θ_2 , e θ_3 . Utilizando código Python calcule as matrizes L1, L2 e L3 para os coeficientes da aceleração.

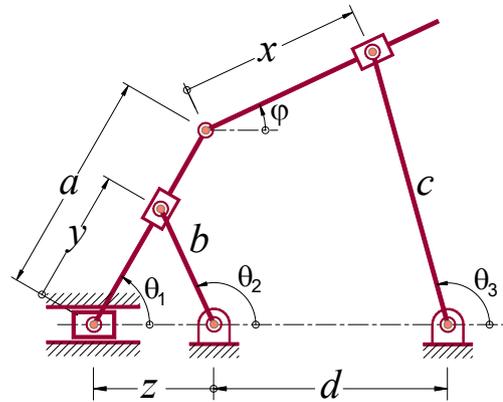


Figura 7.33-28 Cadeia de oito barras com três graus de liberdade, com a sua solução baseada no Python.

29. Na cadeia cinemática da figura, as coordenadas principais são θ_1, θ_2 , e θ_3 . Utilizando código Python calcule as matrizes L_1, L_2 e L_3 para os coeficientes da aceleração.

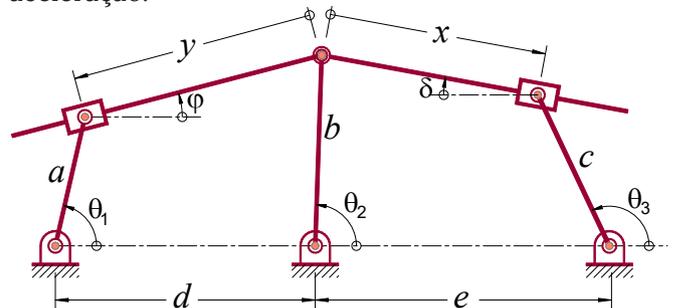


Figura 7.34-29 Cadeia de oito barras com três graus de liberdade, problema solucionado com o Python.

Referências Bibliográficas

D. B. MARGHITU – Kinematic chains and machine components design – Elsevier Academic Press, 2005.

R.L. NORTON – Design of machinery: an introduction to the synthesis and analysis of mechanisms and machines – McGraw-Hill, Fourth Edition 2007.

J. E. SHIGLEY, J.J. UICKER – Theory of Machines and Mechanisms – McGraw-Hill, Second Edition 1995.

S. DOUGHT – Mechanics of Machine – John Wiley & Sons Inc, 2001.

H. H. MABIE, F. W. OCVIRK – Mechanisms And Dynamics Of Machinery – John Wiley & Sons, Third Edition 1978.

Em Edição
Prof. José Maria