

CAPÍTULO 8

Plano Acoplador

Como visto no capítulo 4, todo plano solidário ao acoplador de um mecanismo de quatro barras terá uma infinidade de pontos descrevendo curvas fechadas conhecidas como curvas do acoplador, descritas por equações de quarta ordem ou maior. Neste capítulo vamos estender este conceito às cadeias compostas, chamando de acoplador qualquer barra que não seja uma manivela, balancim ou seguidor associado a uma barra fixa, consequentemente será chamado *plano acoplador* o plano associado a qualquer barra do mecanismo, com exceção da mencionadas acima, e também define-se *ponto do acoplador* a um ponto qualquer pertencente ao plano acoplador. Neste capítulo, teremos como objetivo a determinação das equações de deslocamentos, velocidades e acelerações para estes pontos.

Aqui não haverá distinção entre cadeia imposta ou não imposta, visto só nos interessar o ângulo que a barra acopladora faz com a horizontal, que normalmente é uma coordenada generalizada, e o cálculo deste ângulo como função de uma ou mais de uma coordenada principal não tem nenhuma influência na solução do problema.

No caso de barras não acopladoras, estes cálculos são mais simples, bastando uma multiplicação pelo seno e cosseno do ângulo, para se obter o posicionamento do ponto, velocidades e acelerações pelas sucessivas derivadas. No entanto, ainda poderemos aplicar as equações que aqui serão desenvolvidas o que demandará uma maior complexidade ao problema, porém com os mesmos resultados.

Fique ligado

As expressões que aqui serão desenvolvidas se aplicam a qualquer ponto de qualquer barra, mesmo que esta não seja acopladora.

8.1. Ponto do Acoplador

Ponto do acoplador ou simplesmente ponto acoplador, como já visto, se traduz como um ponto qualquer de um plano associado a uma barra acopladora - naturalmente que, associado a este plano, existe uma infinidade de pontos acopladores, de fato, qualquer ponto deste plano é um ponto acoplador. A figura 8.1 mostra uma barra acopladora e o seu respectivo plano acoplador (plano Σ) onde para simplificação foram retiradas as suas conexões nas extremidades esquerda e direita, normalmente feitas por pares rotativos ou prismáticos. A coordenada generalizada associada à esta barra será a coordenada s_i , mostrada na figura como um ângulo de posicionamento horizontal.

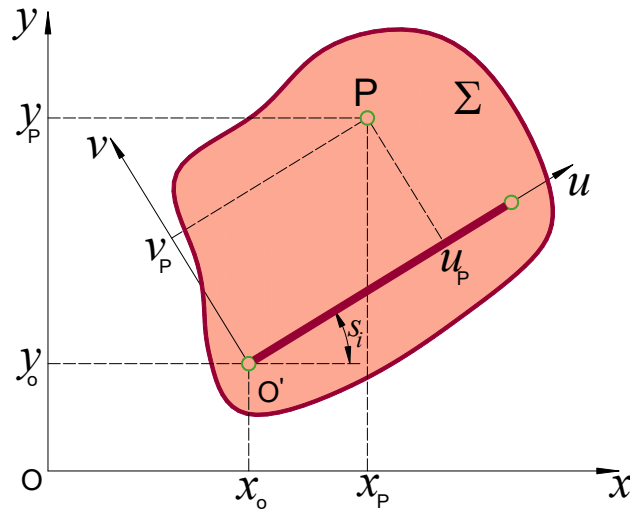


Figura 8.1 Ponto genérico P, em um plano associado a uma barra acopladora.

Deslocamento de Ponto do Acoplador

Considerando o sistema $u \times v$, local ao plano acoplador, com origem no ponto O' e com o eixo das abscissas coincidente com a barra acopladora, teremos (u_p, v_p) para coordenada de "P" neste sistema. Sendo s_i a coordenada generalizada utilizada para descrever a posição angular da barra acopladora, e portanto do sistema local $u \times v$, a transformação de coordenadas do sistema local para o sistema global $x \times y$, pode ser obtida através de uma transformação linear do tipo:

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_o \\ y_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos s_i & -\sin s_i \\ \sin s_i & \cos s_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \end{Bmatrix} \quad (8.1)$$

E, temos então os deslocamentos do ponto acoplador definidos pelo vetor $(x_p, y_p)^T$ como indicado na equação (8.1).

Fique ligado

O sistema local deve estar associado à barra acopladora, isto significa dizer que este sistema passa a ter os mesmos movimentos da barra acopladora.

Velocidade de Ponto do Acoplador

Não esquecendo que $(u_p, v_p)^T$ será sempre um vetor constante, podemos, então, diferenciar a equação (8.1) em relação à coordenada principal “ q ”, para obter diretamente:

$$\begin{Bmatrix} \frac{dx_p}{dq} \\ \frac{dy_p}{dq} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dx_o}{dq} \\ \frac{dy_o}{dq} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{ds_i}{dq} \sin s_i & -\frac{ds_i}{dq} \cos s_i \\ \frac{ds_i}{dq} \cos s_i & -\frac{ds_i}{dq} \sin s_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \end{Bmatrix} \quad (8.2)$$

Lembrando que a diferencial da variável secundária s_i , em relação à variável principal “ q ”, é sempre o coeficiente da velocidade “ k_{s_i} ”, bem como da variável “ x_o ”, em “ q ”, será “ k_{x_o} ”, vem:

$$\begin{Bmatrix} k_{x_p} \\ k_{y_p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{x_o} \\ k_{y_o} \end{Bmatrix} + k_{s_i} \begin{bmatrix} -\sin s_i & -\cos s_i \\ \cos s_i & -\sin s_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \end{Bmatrix} \quad (8.3)$$

Podendo a equação (8.3) ser reescrita de forma simplificada:

$$\tilde{K}_p = \tilde{K}_o + k_{s_i} \tilde{M}U_p \quad (8.4)$$

E então, com base nos conceitos de coeficiente de velocidade, a velocidade do ponto “P” será dada por:

$$\dot{\tilde{P}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{Bmatrix} = \dot{q} \tilde{K}_p \quad (8.5)$$

Aceleração de Ponto do Acoplador

Derivando-se a equação (8.5) em relação ao tempo vamos obter o vetor aceleração, para o ponto “P”, dado por:

$$\ddot{\tilde{P}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \end{Bmatrix} = \ddot{q} \tilde{K}_p + \dot{q}^2 \tilde{L}_p \quad (8.6)$$

com:

$$\tilde{L}_p = \frac{d\tilde{K}_p}{dq} \quad (8.7)$$

8.2. Extensão para Cadeias não Impostas

Como dissemos no início do capítulo as expressões aqui desenvolvidas também se aplicam às cadeias não impostas, porém é claro, sem utilizarmos o artifício dos coeficientes de velocidades ou coeficientes da aceleração, pois neste caso eles são mais complexos. Fiquemos então com as derivadas temporais de deslocamento e velocidade para o ponto “P”.

Antes porém, notemos que as sucessivas derivadas da matriz dos cossenos diretores pode ser sempre obtida a partir de um produto desta pela matriz antissimétrica Ω .

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

de fato,

$$\begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin a & -\cos a \\ \cos a & -\sin a \end{bmatrix}$$

Escrevamos então a equação de posição do ponto acoplador, equação

(8.1), sob a forma:

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{X}_o + \underset{\sim}{M}\underset{\sim}{U} \quad (8.9)$$

Ou, mais especificamente, na sua forma mais ampla, podemos escrever:

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_o \\ y_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos s_i & -\sin s_i \\ \sin s_i & \cos s_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (8.10)$$

A derivada, da equação (8.9), em relação ao tempo, vai nos fornecer para velocidade do ponto acoplador:

$$\underset{\sim}{\dot{P}} = \underset{\sim}{\dot{X}}_o + \underset{\sim}{\dot{s}}_i \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\Omega} \underset{\sim}{U} \quad (8.11)$$

Agora, derivando mais um vez em relação ao tempo vamos obter a aceleração na forma:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\ddot{P}} &= \underset{\sim}{\ddot{X}}_o + \underset{\sim}{\ddot{s}}_i \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\Omega} \underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{\dot{s}}_i^2 \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\Omega}^2 \underset{\sim}{U} \\ &= \underset{\sim}{\ddot{X}}_o + \underset{\sim}{M} (\underset{\sim}{\ddot{s}}_i \underset{\sim}{\Omega} - \underset{\sim}{\dot{s}}_i^2 \underset{\sim}{I}) \underset{\sim}{U} \\ &= \underset{\sim}{\ddot{X}}_o + \underset{\sim}{M} (\underset{\sim}{\ddot{s}}_i \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \underset{\sim}{\dot{s}}_i^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \underset{\sim}{U} \\ &= \underset{\sim}{\ddot{X}}_o + \underset{\sim}{M} \begin{bmatrix} -\underset{\sim}{\dot{s}}_i^2 & -\underset{\sim}{\ddot{s}}_i \\ \underset{\sim}{\ddot{s}}_i & -\underset{\sim}{\dot{s}}_i^2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{U} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Na equação (8.12), Note que a passagem da primeira para a segunda linha, levou em consideração que $\underset{\sim}{\Omega}^2 = -\underset{\sim}{I}$. Agora, definido a matriz:

$$\underset{\sim}{\Gamma} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\dot{s}}_i^2 & \underset{\sim}{\ddot{s}}_i \\ -\underset{\sim}{\ddot{s}}_i & \underset{\sim}{\dot{s}}_i^2 \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

Podemos reescrever a última linha de (8.11) na forma:

$$\underset{\sim}{\ddot{P}} = \underset{\sim}{\ddot{X}}_o - \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\Gamma} \underset{\sim}{U} \quad (8.14)$$

Ou, mais especificamente, na sua forma ampla, podemos escrever:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_o \\ \ddot{y}_o \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos s_i & -\sin s_i \\ \sin s_i & \cos s_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\dot{s}}_i^2 & \underset{\sim}{\ddot{s}}_i \\ -\underset{\sim}{\ddot{s}}_i & \underset{\sim}{\dot{s}}_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (8.15)$$

E, refazendo o sistema (8.15), teremos, finalmente:

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = \ddot{x}_o - \ddot{s}_i(u \sin s_i + v \cos s_i) - \dot{s}_i^2(u \cos s_i + v \sin s_i) \\ \ddot{y}_p = \ddot{y}_o + \ddot{s}_i(u \cos s_i - v \sin s_i) - \dot{s}_i^2(u \sin s_i + v \cos s_i) \end{cases} \quad (8.16)$$

E agora sim, estas duas expressões, (8.10) e (8.16), valem para um ponto acoplador pertencente a qualquer tipo de cadeia, seja ela imposta ou não.

8.3. Aplicação

Vamos obter os deslocamentos, velocidades e acelerações para o ponto “P” associado ao plano acoplador da biela no mecanismo mostrado na figura 8.2, sabendo que este ponto se encontra a uma distância “a” da barra “b” (biela) e a uma distância b/2 do ponto “A”.

Aqui, poderíamos escolher o sistema local com origem no ponto “A” ou no ponto “B” indistintamente. Para qualquer escolha o resultado será o mesmo, mas por uma conveniência de facilidade na obtenção das derivadas em

“ x_o ”, vamos escolher o ponto “B” para origem do sistema local, como mostrado na figura 8.3 e vamos colocar a origem do sistema global no par rotativo fixo.

Desta forma teremos na sequência:

$$\tilde{X}_o = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{U} = \begin{Bmatrix} \frac{b}{2} \\ -a \end{Bmatrix} \quad (8.17)$$

Como a origem do sistema local, figura 8.3, foi colocada no ponto “B”, tendo o eixo das abscissas alinhado com a barra acopladora, o eixo das ordenadas deverá ser orientado para baixo permitindo que o sistema local, $u \times v$, seja destrógiro, condição esta necessária para que as equações desenvolvidas possam ser aplicadas. Então a coordenada secundária “ s_i ”, associada ao sistema local, será:

$$s_i = \pi - \varphi \quad (8.18)$$

Como consequência:

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= -\dot{\varphi} \\ \ddot{s}_i &= -\ddot{\varphi} \\ \sin s_i &= \sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi \\ \cos s_i &= \cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi \end{aligned} \quad (8.19)$$

Deslocamentos

A partir da equação (8.19) é possível se obter a matriz “ $\underline{M}$ ” na equação (8.20) a seguir.

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \cos s_i & -\sin s_i \\ \sin s_i & \cos s_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} \quad (8.20)$$

A equação (8.10) toma, então, a forma:

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{b}{2} \\ -a \end{Bmatrix} \quad (8.21)$$

O que nos permite escrever, para deslocamentos:

$$\begin{cases} x_p = x + a \sin \varphi - \frac{b}{2} \cos \varphi \\ y_p = a \cos \varphi + \frac{b}{2} \sin \varphi \end{cases} \quad (8.22)$$

Notando que $x - \frac{b}{2} \cos \varphi = a \cos \theta + \frac{b}{2} \cos \varphi$; $\frac{b}{2} \sin \varphi = a \sin \theta - \frac{b}{2} \sin \varphi$ e substituindo na equação (8.20), vamos obter:

$$\begin{cases} x_p = a \cos \theta + \frac{b}{2} \cos \varphi + a \sin \varphi \\ y_p = a \sin \theta + a \cos \varphi - \frac{b}{2} \sin \varphi \end{cases} \quad (8.23)$$

E, note que, esta é exatamente a expressão que teríamos obtido se tivéssemos colocado a origem do sistema local no ponto “A”.

Velocidades

A partir de (8.15), podemos encontrar:

$$\dot{\tilde{X}}_o = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.24)$$

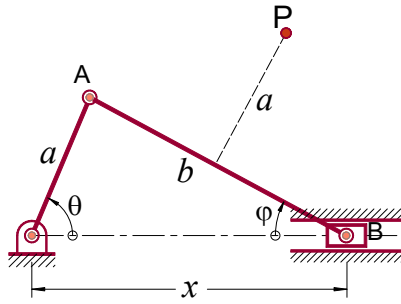


Figura 8.2 Ponto do acoplador P, associado à manivela como barra acopladora.

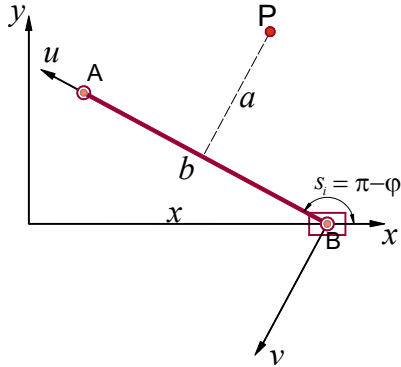


Figura 8.3 Escolha do sistema local com origem no ponto B, centro do seguidor.

E agora aplicando a equação (8.11), vamos ter:

$$\underset{\sim}{\dot{P}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{Bmatrix} - \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{b}{2} \\ -a \end{Bmatrix} \quad (8.25)$$

O que se traduz em:

$$\begin{cases} \dot{x}_p = \dot{x} + \dot{\varphi}(a \cos \varphi + \frac{b}{2} \sin \varphi) \\ \dot{y}_p = -\dot{\varphi}(a \sin \varphi) - \frac{b}{2} \cos \varphi \end{cases} \quad (8.26)$$

Acelerações

Para o cálculo das acelerações, vamos ter:

$$\underset{\sim}{\ddot{X}}_o = \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.27)$$

E da equação (8.13) vamos obter a matriz:

$$\underset{\sim}{\Gamma} = \begin{bmatrix} \dot{s}_i^2 & \ddot{s}_i \\ -\ddot{s}_i & \dot{s}_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\dot{\varphi})^2 & -\ddot{\varphi} \\ -(-\ddot{\varphi}) & (-\dot{\varphi})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}^2 & -\ddot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} & \dot{\varphi}^2 \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

Sendo assim, podemos agora compor a equação (8.14) da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{\ddot{P}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -\cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}^2 & -\ddot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} & \dot{\varphi}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{b}{2} \\ -a \end{Bmatrix} \quad (8.29)$$

O que, a partir da composição da equação (8.29), nos permite obter finalmente:

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = \ddot{x} + \ddot{\varphi}(a \cos \varphi + \frac{b}{2} \sin \varphi) - \dot{\varphi}^2(a \sin \varphi - \frac{b}{2} \cos \varphi) \\ \ddot{y}_p = -\ddot{\varphi}(a \sin \varphi - \frac{b}{2} \cos \varphi) - \dot{\varphi}^2(a \cos \varphi + \frac{b}{2} \sin \varphi) \end{cases} \quad (8.30)$$

Cabe ao aluno verificar que as sucessivas derivadas, totais, em relação ao tempo, na equação (8.20) também vai permitir que cheguemos a este resultado.

Ressalte-se ainda que as expressões obtidas, (8.23), (8.26) e (8.30), só podem ser consideradas como solução do problema se, de antemão, tivermos encontrado os valores das variáveis x , φ , $\dot{x}$, $\dot{\varphi}$, $\ddot{x}$ e $\ddot{\varphi}$, uma vez que estas variáveis constam nestas expressões, aqui isto foi dispensado pelo fato de os valores destas variáveis já terem sido encontrados no problema inicial do capítulo 6.

8.4. Implementação em Python

Como nos capítulos anteriores, vamos aqui também desenvolver os códigos para que possamos resolver, computacionalmente os problemas sobre ponto do acoplador aqui apresentados.

O script a seguir é uma generalização que pode ser aplicado a qualquer problema envolvendo ponto acoplador, sendo necessário apenas que se adapte a geometria do problema, em apreço, nas linhas de 11 a 22.

O código segue os parâmetros utilizados no desenvolvimento da teoria apresentada até aqui e, por conta disto, fica bastante fácil a sua compreensão. Cabe apenas acrescentar que as variáveis que terminam com a letra “v” corres-

pondem às velocidades e as variáveis terminadas com a letra “a” correspondem às acelerações.

```

1  from sympy import *
2  init_printing(use_latex = 'mathjax')
3
4  u,v = symbols('u v')
5  si,siv,sia = symbols('s_i \dot{s}_i \ddot{s}_i')
6  xo,xov,xoa = symbols('x_o \dot{x}_o \ddot{x}_o')
7  yo,yov,yoa = symbols('y_o \dot{y}_o \ddot{y}_o')
8
9  '''===== Variáveis específicas da cadeia =====
10     ===== que está sendo resolvida ====='''
11  ... , ... = symbols('... ')
12  u = ...
13  v = ... # Substitua “...” por uma variável
14  si = ... # Definida em “symbols”, por exemplo:
15  siv = ... # j,jv=symbols('varphi \dot{\varphi}')
16  Sia = ... # si = j
17  xo = ... # siv = jv
18  xov = ... # Quando a variável for uma constante,
19  xoa = ... # Substitua a correspondente pela cons-
20  yo = ... # Tante, por exemplo:
21  yov = ... # u = 3
22  yoa = ... # yo = 0
23  '''-----'''
24
25  M = Matrix([[cos(si), -sin(si)],[sin(si), cos(si)]])
26  U = Matrix([u,v])
27
28  Xo = Matrix([xo,yo]) # Origem do Sistema
29  Xov = Matrix([xov,yov]) # Local, deslocamento,
30  Xoa = Matrix([xoa,yoa]) # velocidade,aceleração
31
32  Om = Matrix([[0, -1],[1,0]]) # Matriz  $\Omega$ 
33  Gm = Matrix([[siv**2, sia],[-sia, siv**2]]) # Matriz  $\Gamma$ 
34
35  P = simplify(Xo + M*U) # Equação (8,9)
36  Pv = simplify(Xov + siv*M*Om*U) # Equação (8.11)
37  Pa = simplify(Xoa - M*Gm*U) # Equação (8.14)

```

Para que entendamos melhor a aplicação do script acima, vamos resolver, com ele, no script logo abaixo, o problema de um ponto acoplador na biela de um mecanismo biela manivela, especificamente o problema da figura 8.2 que já foi resolvido acima.

```

1  from sympy import *
2  init_printing(use_latex = 'mathjax')
3
4  u,v = symbols('u v')
5  si,siv,sia = symbols('s_i \dot{s}_i \ddot{s}_i')
6  xo,xov,xoa = symbols('x_o \dot{x}_o \ddot{x}_o')
7  yo,yov,yoa = symbols('y_o \dot{y}_o \ddot{y}_o')
8
9  '''===== Variáveis específicas da cadeia =====
10     ===== que está sendo resolvida ====='''
11  a,b = symbols('a b')
12  x,xv,xa = symbols('x \dot{x} \ddot{x}')
13  j,jv,ja=symbols('varphi \dot{\varphi} \ddot{\varphi}')
14  u = b/2
15  v = -a

```

```

16 si = pi-j
17 siv = -jv
18 Sia = -ja
19 xo = x
20 xov = xv
21 xoa = xa
22 yo = 0
23 yov = 0
24 yoa = 0
25 '''-----'''
26
27 M = Matrix([[cos(si), -sin(si)], [sin(si), cos(si)]])
28 U = Matrix([u,v])
29
30 Xo = Matrix([xo,yo])
31 Xov = Matrix([xov,yov])
32 Xoa = Matrix([xo,yo])
33
34 Om = Matrix([[0, -1], [1, 0]])
35 Gm = Matrix([[siv**2, sia], [-sia, siv**2]])
36
37 P = simplify(Xo + M*U)
38 Pv = simplify(Xov + siv*M*Om*U)
39 Pa = simplify(Xoa - M*Gm*U)

```

O código deste script quando submetido ao Jupyter, seja no site ou localmente, vai fornecer, como resultados o damping de tela apresentado no “damping 8.1” mostrado abaixo, onde só estamos apresentando os resultados e não o código completo.

In [2]: P

$$\text{Out [2]: } \begin{bmatrix} a \sin(\varphi) - \frac{b \cos(\varphi)}{2} + x \\ a \cos(\varphi) + \frac{b \sin(\varphi)}{2} \end{bmatrix}$$

In [3]: Pv

$$\text{Out [3]: } \begin{bmatrix} \dot{\varphi} a \cos(\varphi) + \frac{\dot{\varphi} b \sin(\varphi)}{2} + \dot{x} \\ \frac{\dot{\varphi}(-2a \sin(\varphi) + b \cos(\varphi))}{2} \end{bmatrix}$$

In [4]: Pa

$$\text{Out [4]: } \begin{bmatrix} \ddot{x} - a(\ddot{s}_i \cos(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)) - \frac{b(\ddot{s}_i \sin(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi))}{2} \\ a(\ddot{s}_i \sin(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi)) - \frac{b(\ddot{s}_i \cos(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi))}{2} \end{bmatrix}$$

Damping de Tela 8.1 Resultados do código Python para um ponto do acoplador no mecanismo biela manivela.

8.5 Exercícios

1. Determine as equações de deslocamento, velocidade e aceleração para o ponto P, ligado ao pistão na figura abaixo, tente fazer um esboço da curva gerada.

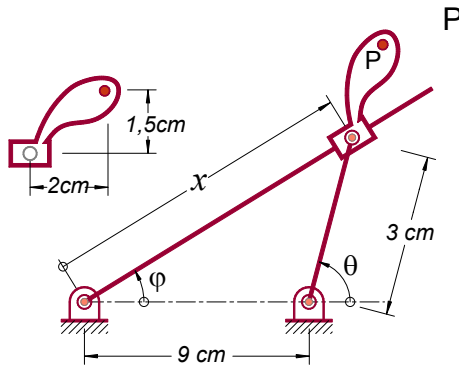


Figura 8.4-1 Curva associada ao ponto P do pistão para o mecanismo biela manivela.

2. O mecanismo da figura é utilizado para movimentar peças horizontalmente de um determinado passo, para cada revolução completa da manivela. As dimensões “a”, “b”, “c” e “r” são conhecidas. Para estas condições:

- Determine as coordenadas (x_p, y_p) , tomando como origem global o centro de rotação da barra “r”;
- Calcule a velocidade e a aceleração do ponto “P” para os dados abaixo.

$$\theta = 0,8 \text{ rad} \quad \dot{\theta} = 14,5 \text{ rad/s} \quad \ddot{\theta} = 28 \text{ rad/s}^2$$

$$a = 14 \text{ cm} \quad b = 5 \text{ cm} \quad c = 8,5 \text{ cm}$$

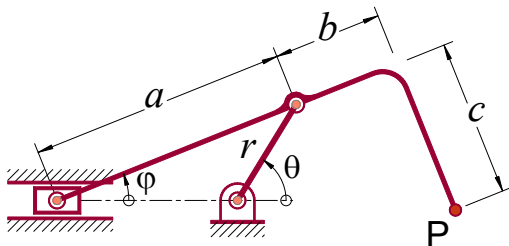


Figura 8.5-2 Mecanismo para movimentação horizontal de objetos.

3. Para o problema anterior, monte o script em Python para solucionar o item “b”, não esquecendo de adicionar ao código os valores das variáveis x , ϕ , $\dot{x}$, $\dot{\phi}$, $\ddot{x}$ e $\ddot{\phi}$ em função do deslocamento, velocidade e aceleração de entrada.

4. Obtenha as equações de deslocamento, velocidade e aceleração para o centro de massa do acoplador do mecanismo biela manivela mostrado na figura.

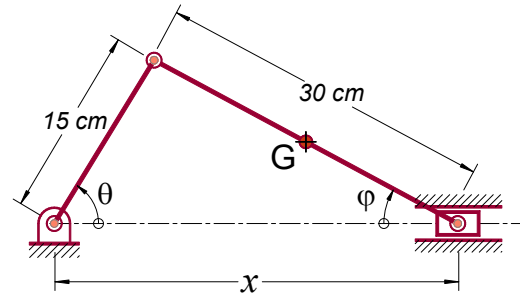


Figura 8.6-4 Centro de massa do acoplador no mecanismo biela manivela.

5. Obtenha as equações de deslocamento, velocidade e aceleração para o centro de massa “G”, do acoplador do mecanismo de quatro barras mostrado na figura.

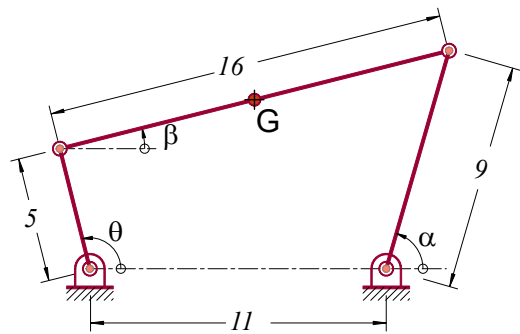


Figura 8.7-5 obtenção das equações para o centro de massa do acoplador do mecanismo de quadro barras.

6. No problema da figura, o ponto acoplador se situa na extremidade direita da barra “c”. Obtenha a equação da curva descrita por este em coordenadas cartesianas e determine sua velocidade tangencial em cada ponto desta curva.

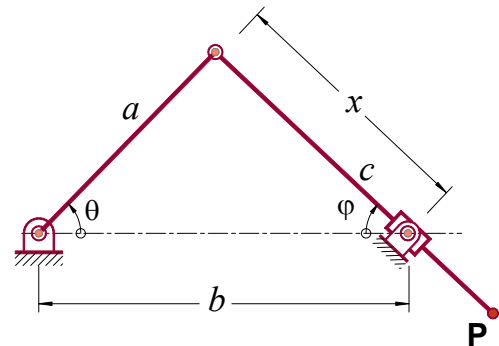


Figura 8.8-6 Ponto acoplador na extremidade final da barra c.

7. Na plaina limadora mostrada na figura, a velocidade da manivela é constante. Determine a aceleração do centro de massa G , da barra d que acopla o balancim ao torpedo.

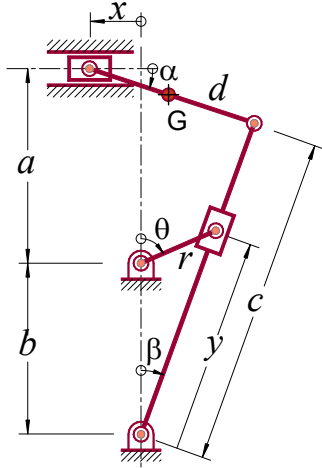


Figura 8.9-7 Plaina limadora onde se quer determinar a aceleração do centro de massa do acoplador do balancim com o torpedo.

8. Para a cadeia cinemática mostrada na figura, determine o deslocamento, velocidade e aceleração do ponto “P”, em relação a um referencial fixo, atentando para que os resultados fiquem unicamente em função do comprimento das barras e da coordenada principal θ .

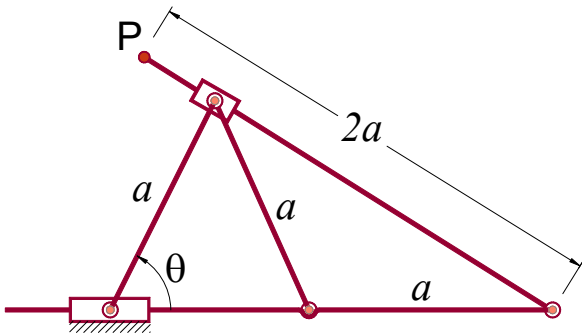


Figura 8.10-8 Cadeia cinemática com resolução simplificada na coordenada principal.

9. No mecanismo mostrado, as coordenadas generalizadas são (θ, φ, x) e a barra “b” é sempre perpendicular à barra “c”. Verifique se a velocidade do ponto “P” pode ser dada por:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{Bmatrix} = \frac{a\dot{\theta}}{x} \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \varphi \sin (\varphi + \theta) \\ \cos \theta & \sin \varphi \sin (\varphi + \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ b \end{Bmatrix}$$

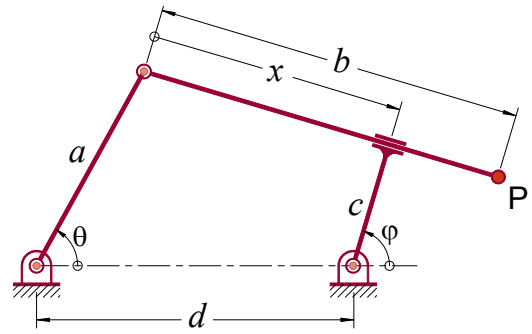


Figura 8.11-9 Mecanismo do quadrilátero articulado com duas barras perpendiculares.

9. No mecanismo dado, as coordenadas generalizadas são (θ, α, β) . Quando a barra “b” se alinhar com a barra acopladora ($\theta = \pi/2$) mostre que a velocidade horizontal do ponto “P” é inversamente proporcional à velocidade angular da barra “b”.

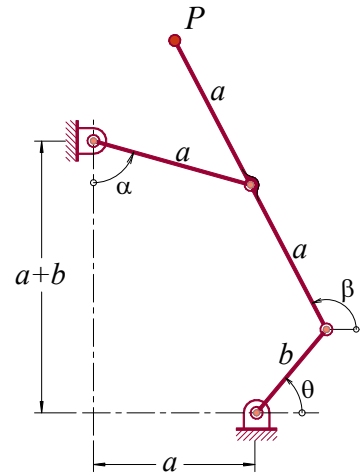


Figura 8.12-9 Quadrilátero articulado com ponto do acoplador deslocado.

10. Na figura, as coordenadas generalizadas são (θ, φ, x) e as duas barras têm o mesmo comprimento “a”, determine o deslocamento, velocidade e aceleração para o ponto “P”.

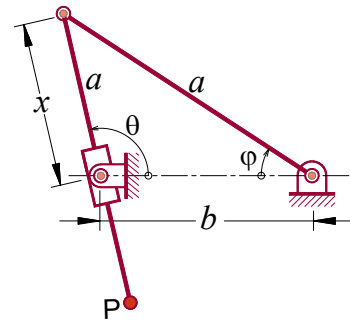


Figura 8.13-10 Inversão do mecanismo Biela Manivela com ponto acoplador na biela.

11. No mecanismo a barra “a” se mantém perpendicular à barra “b”, a barra “b” tem comprimento “e” e a barra “a” recebe o movimento de entrada. Verifique se as equações abaixo, que determinam os coeficientes da aceleração para o ponto “P” estão corretas.

$$\begin{cases} \ell_{x_p} = -2c - (e - 4c \sin \theta) \sin \theta \\ \ell_{y_p} = -(e + 4c \sin \theta) \cos \theta \end{cases}$$

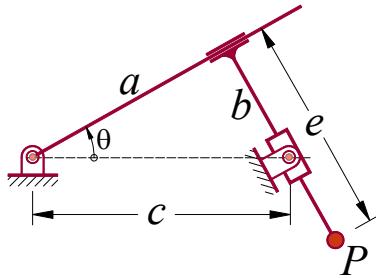


Figura 8.14-11 Mecanismo de Biela Manivela com barras perpendiculares e dois pares prismáticos.

12. No mecanismo a barra “a” recebe o movimento através da coordenada θ . Determine o deslocamento, velocidade e aceleração para o ponto “P” do acolador.

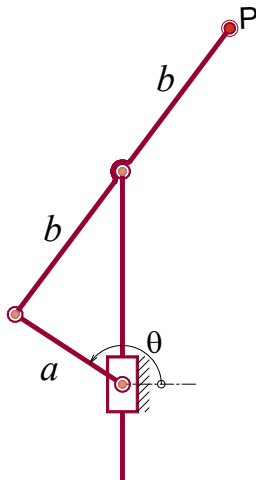


Figura 8.15-12 Mecanismo de Biela Manivela com barras perpendiculares e dois pares prismáticos.

13. No problema anterior a velocidade do ponto “P” deve ir para infinito quando a barra de entrada estiver na vertical, analise as duas posições possíveis e verifique se isto é verdadeiro.

14. Na figura mostrada a seguir, sabendo-se que a entrada se faz pelo pistão, coordenada “x”, arbitre outras coordenadas generalizadas, que se façam necessárias, e determine a velocidade do centro de massa da barra “a”, ponto “G”.

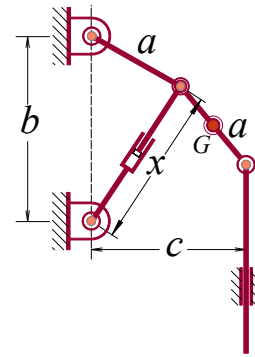


Figura 8.16-14 Mecanismo de seis barras com o ponto do acoplador centralizado.

15. No mecanismo dado, as coordenadas generalizadas são (θ, ϕ, z) . Com o sistema global no ponto “B”, determine os deslocamentos, velocidades e acelerações para o ponto “P”.

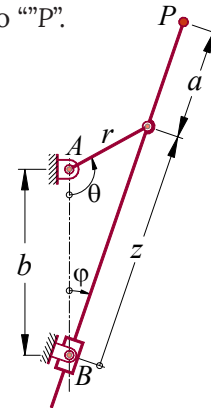


Figura 8.17-15 Biela Manivela com o ponto do acoplador alinhada à manivela e sistema global no ponto “B”.

16. No mecanismo mostrado, a barra “r” recebe a entrada, o ponto “P” desliza sobre a barra, em que se apoia, mantendo uma distância “x”, variável, do início da dobra. Sabendo que este “x” associado a “P” tem o mesmo valor da coordenada “x” do pistão, em cada momento, determine o deslocamento, velocidade e aceleração para o ponto “P”.

Obs.: Note, neste problema, que o vetor $(u, v)^T$ não é constante.

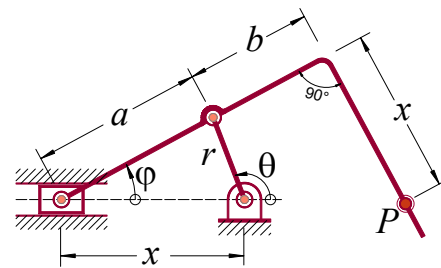


Figura 8.18-16 Mecanismo em que o ponto do acoplador se move sobre a barra.

Referências Bibliográficas

D. B. MARGHITU – Kinematic chains and machine components design – Elsevier Academic Press, 2005.

R.L. NORTON – Design of machinery: an introduction to the synthesis and analysis of mechanisms and machines – McGraw-Hill, Fourth Edition 2007.

J. E. SHIGLEY, J.J. UICKER – Theory of Machines and Mechanisms – McGraw-Hill, Second Edition 1995.

S. DOUGHT – Mechanics of Machine – John Wiley & Sons Inc, 2001.

H. H. MABIE, F. W. OCVIRK – Mechanisms And Dynamics Of Machinery – John Wiley & Sons, Third Edition 1978.