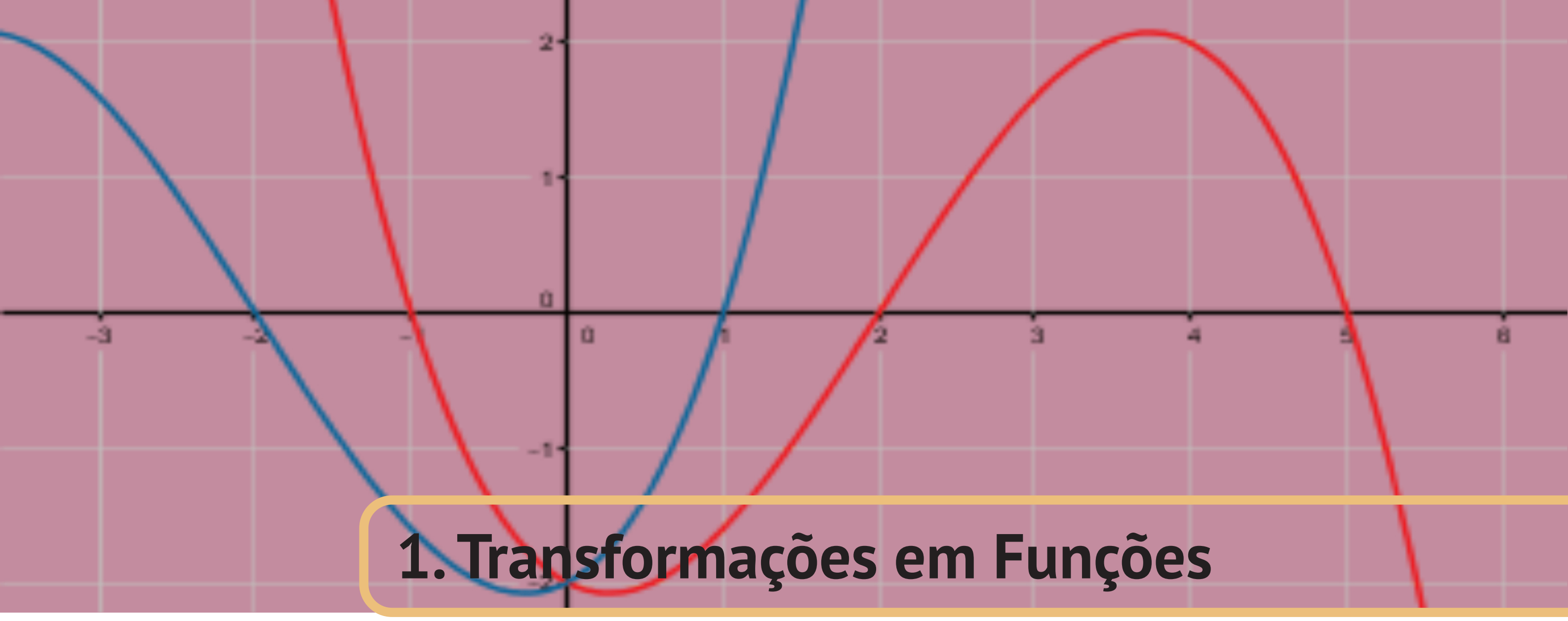

1. Transformações em Funções

No projeto de um sistema came seguidor, como veremos mais adiante, a cinemática do seguidor se baseia em funções matemáticas específicas que descrevem o seu deslocamento, velocidade e aceleração a partir das suas derivadas. Normas relativas ao projeto de cames, requerem que estas funções, aqui denominadas "curvas de elevação", tenham determinadas características a fim de prover um movimento suave e sem choques para o seguidor.

Para o desenvolvimento das curvas de elevação, em cames, vamos relembrar os conhecimentos sobre as operações que podemos fazer nas funções com a consequente mudança em seus gráficos, neste estudo, nós estamos convencionado que a função original tem a cor magenta para o seu gráfico e a função obtida, pela operação indicada, tem a cor amarela para o seu gráfico.

Desta forma, vai nos interessar as seis operações que se seguem.

1.1 Translação de função

1.1.1 Na direção horizontal (eixo x)

A **figura 1.1** deixa claro que a função $g(x)$ obtida da função $f(x)$ pela translação desta de um distância a na horizontal será:

$$g(x) = f(x-a) \tag{1.1.1}$$

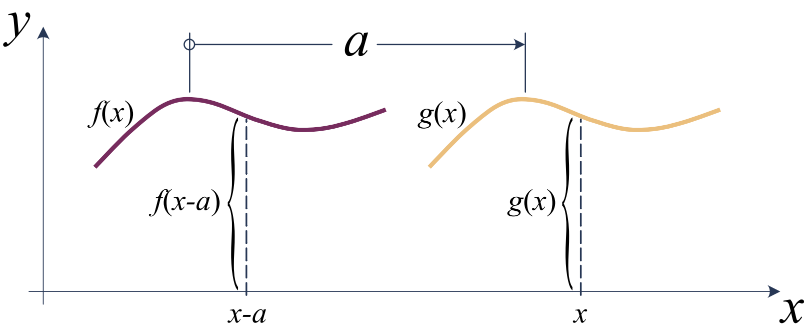

Figura 1.1 - Translação da função f de uma distância a na direção x.

Note que, na expressão (1.1.1), o valor de a é algébrico, ou seja, a positivo implica em deslocamento da esquerda para a direita e a negativo implica em deslocamento da direita para a esquerda.

1.1.2 Na direção vertical (eixo y)

Na **figura 1.2**, podemos perceber que a função $g(x)$ obtida da função $f(x)$ pela translação desta de uma altura h na vertical será:

$$g(x) = f(x) + h \tag{1.1.2}$$

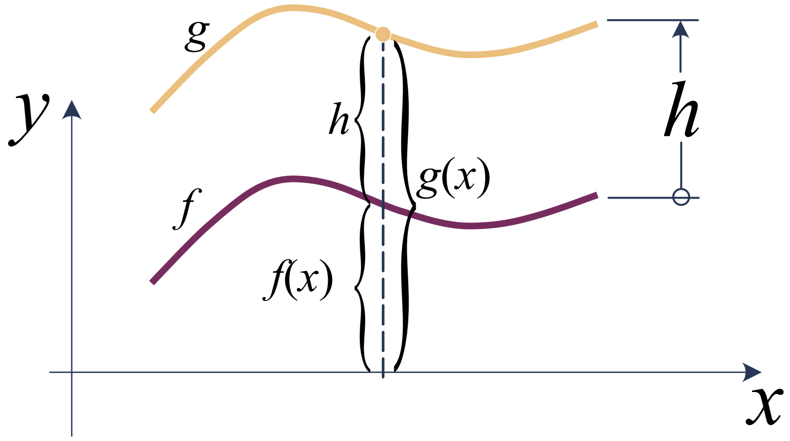

Figura 1.2 - Translação da função f de uma distância h na direção y.

Na expressão (1.1.2), fica claro que se o valor de h for positivo o deslocamento será ascendente e se for negativo, este será descendente.

1.2 Reflexão

1.2.1 Horizontal (espelhamento em x)

Pela **figura 2.1**, vemos que a função $g(x)$ pode ser obtida da função $f(x)$ pela troca do sinal na própria função $f(x)$:

$$g(x) = -f(x) \tag{1.2.1}$$

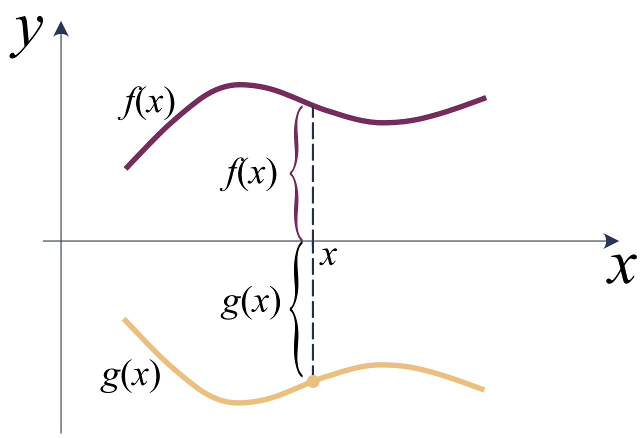

Figura 2.1 - Reflexão da função f em relação ao eixo x.

Perceba aqui que, no caso de a função $f(x)$, original, se situar abaixo do eixo x, a expressão (1.2.1) não muda, ou seja, o sinal de $f(x)$, nesta expressão, continua sendo negativo.

1.2.2 Vertical (espelhamento em y)

Na **figura 2.2**, é fácil ver que a função $g(x)$ pode ser obtida da função $f(x)$ pela troca de sinal no argumento:

$$g(x) = f(-x) \tag{1.2.2}$$

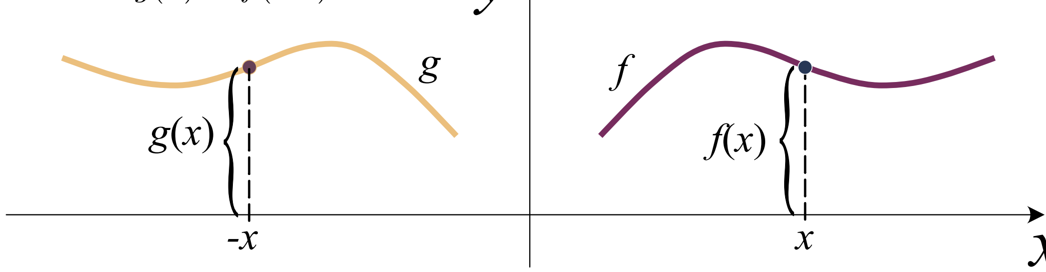

Figura 2.2 - Reflexão da função $f(x)$ em relação ao eixo y.

Também aqui, para o caso de a função $f(x)$, original, se situar à esquerda do eixo y, a expressão (1.2.2) não muda, ou seja, o sinal do argumento da função $f(x)$, continua sendo negativo.

1.3 Expansão e Contração

Matematicamente a expansão de funções pode ser feita com a função original associada a um domínio cuja a extremidade esquerda assuma qualquer valor, seja ele positivo, negativo ou nulo. Em nosso caso, e isto simplifica bastante o resultado, vamos considerar apenas funções cuja extremidade esquerda do domínio seja nula, ou seja nossos domínios serão da forma $[0, a]$, com a pertencente a $\mathbb{R}^+$.

Isto se deve ao fato de que as funções utilizadas na descrição do movimento dos seguidores iniciam-se sempre em zero.

1.3.1 Expansão/Contração na Horizontal

A expansão ou escalonamento, **figura 3.1**, na direção x, função $g(x)$, pode ser obtida da função original, $f(x)$ pela multiplicação do argumento por um fator $k = a/b$:

$$g(x) = f(\tfrac{a}{b}x) \tag{1.3.1}$$

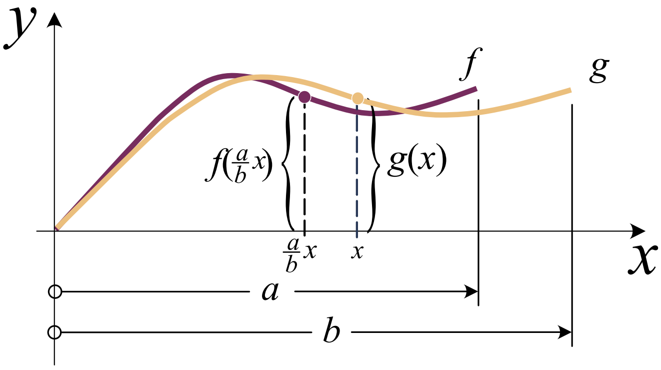

Figura 3.1 - Expansão da função $f(x)$ na direção x.

Perceba aqui que se o fator k for menor que a unidade, teremos uma expansão, caso contrário, $k > 1$, iremos ter uma contração.

1.3.2 Expansão/Contração na Vertical

A expansão ou escalonamento, **figura 3.2**, na direção y, pode ser obtida a partir da função original $f(x)$, pela multiplicação desta mesma função por um fator $k = b/f(a)$:

$$g(x) = \frac{b}{f(a)} f(x) \tag{1.3.2}$$

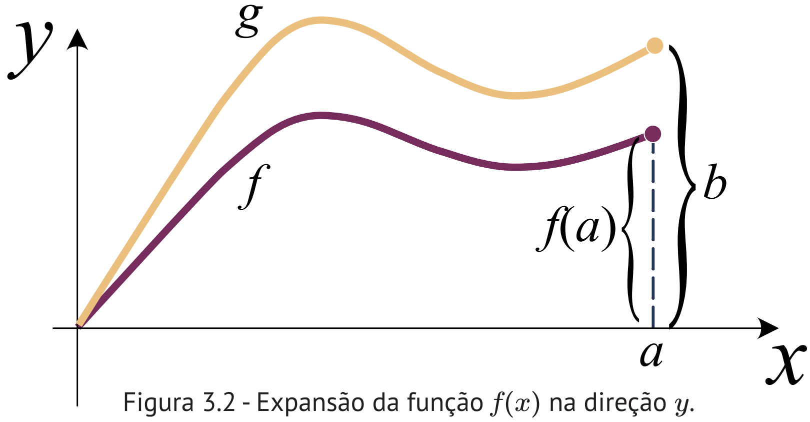

Figura 3.2 - Expansão da função $f(x)$ na direção y.

Para este caso, o fator k sendo maior que um, teremos a expansão vertical, a função original fica abaixo, caso contrário, $k < 1$, iremos ter uma contração com a função original apresentando-se acima.

1.4 Normalização

Consiste em se adaptar o domínio e o contradomínio da função original para os intervalos $[0,\ 1]$ e $[0,\ 1]$ respectivamente, **figura 4.1** . Normalmente ocorre por deslocamento, se necessário, para colocar o início da função na origem, seguido de expansão em um ou nos dois eixos.

Ao final fica-se com:

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f(1) = 1 \tag{1.4.0}$$

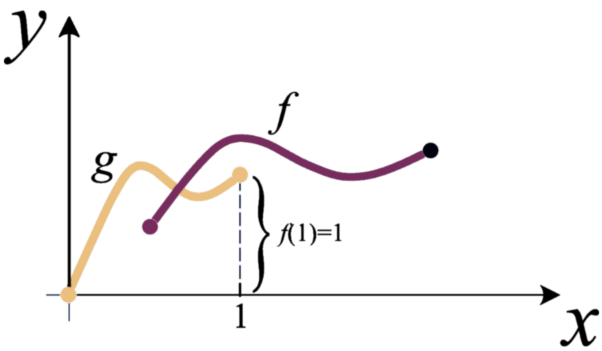

Figura 4.1 - Normalização da função $f(x)$.

Exemplos de funções já normalizadas.

$$f(x) = x^2$$
$$f(\alpha) = \tfrac{1}{2}(1 - \cos \pi\alpha)$$
$$f(\theta) = 3\theta^2 - 2\theta^3$$
$$f(\beta) = \tfrac{1}{3}\mathrm{tg}^2 \tfrac{\pi}{3}\beta$$

Como exemplo, vamos normalizar a função dada na expressão (1.4.1) abaixo, considerando a mesma definida no intervalo fechado $[2-\pi, 2]$.

$$f(x) = 4 + \cos(2-x) \tag{1.4.1}$$

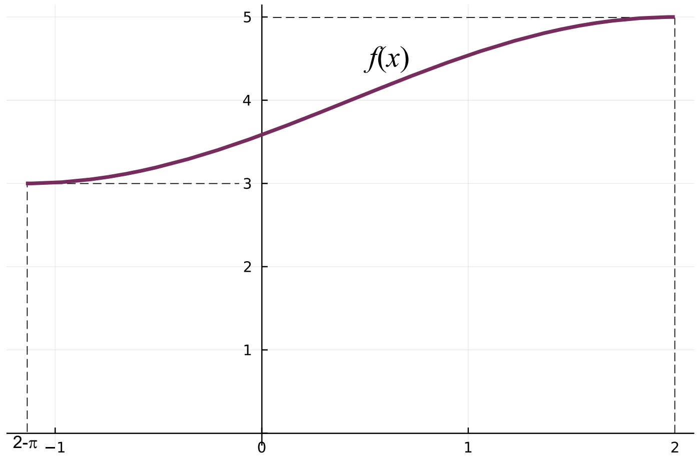

Figura 4.2 - Função $f(x)$, sugerida no exemplo.

Nosso primeiro passo será o translado da extremidade esquerda da função $f(x)$ para a origem do sistema. Pela **figura 4.2**, podemos ver que trata-se, inicialmente, de um deslocamento vertical, descendente, de 3 unidades, vamos obter a função $g(x)$, a partir da expressão (1.1.2), que será dada por:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - 3 \\ &= 4 + \cos(2-x) - 3 \\ &= 1 + \cos(2-x) \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

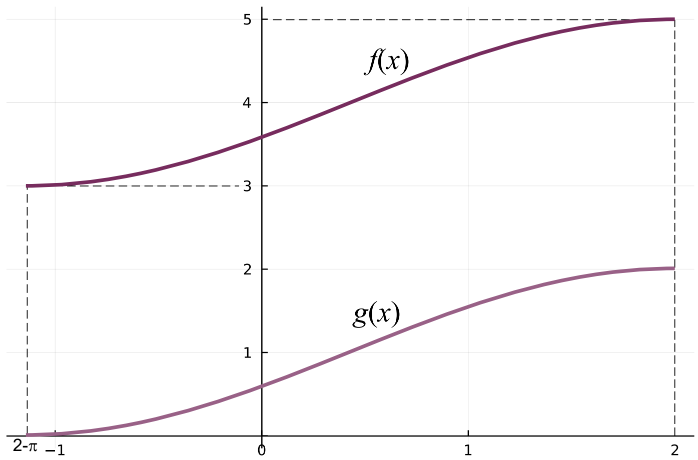

Figura 4.3 - Obtenção da função $g(x)$, a partir da função $f(x)$.

Em seguida, devemos proceder a um deslocamento horizontal de $-(2-\pi)$ na função $g(x)$, e isto pode ser feito considerando-se a equação (1.1.1).

Note que o deslocamento será da esquerda para a direita, então o têrmo "a" deverá ser positivo, daí utilizarmos o sinal negativo na expressão $2-\pi$, para positivá-la.

Então, para este caso, o resultado será:

$$
\begin{aligned}
h(x) &= g(x - (-(2-\pi))) \\
&= 1 + \cos(2 - (x + (2-\pi)) \\
&= 1 + \cos(\pi - x) \\
&= 1 - \cos(x)
\end{aligned} \tag{1.4.3}
$$

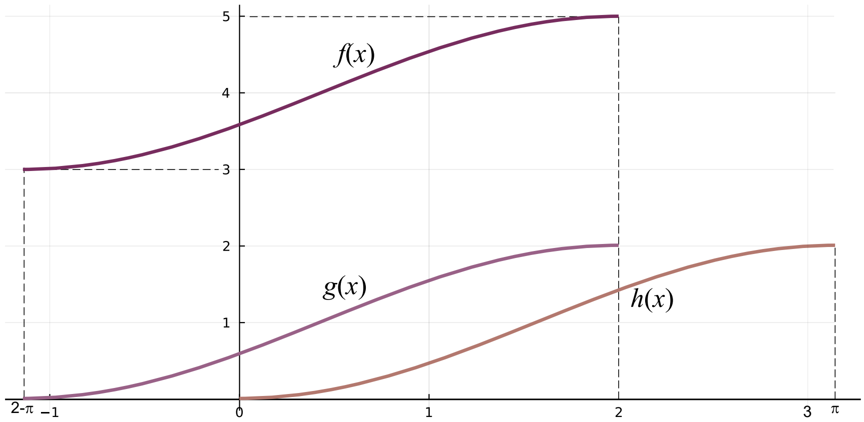

Figura 4.4 - Obtenção da função $h(x)$, a partir da função $g(x)$.

Após termos deslocado a função original para a origem do sistema, vamos proceder a duas expansões, neste caso *contrações*, uma na horizontal e outra na vertical para chegarmos à solução final.

Façamos, inicialmente, uma contração, horizontal, na função $h(x)$, percebendo, ao se utilizar a equação (1.3.1), que $a = \pi$ e $b = 1$, com isto, vamos obter:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= h(\frac{\pi}{1}x) \\
&= 1 - \cos \pi x
\end{aligned} \tag{1.4.4}
$$

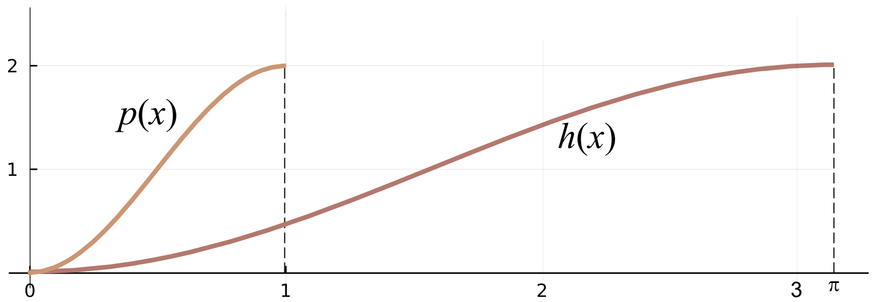

Figura 4.5 - Obtenção da função $p(x)$, a partir da função $h(x)$.

Finalmente, a nossa última operação será uma contração, vertical, na função $p(x)$, notando que, ao se utilizar a equação (1.3.2), teremos $f(a) = 2$ e $b = 1$, e vamos obter, então:

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \frac{1}{2}p(x) \\
&= \frac{1}{2}(1 - \cos \pi x)
\end{aligned} \tag{1.4.5}
$$

Função $q(x)$ final mostrada no gráfico, **figura 4.6**.

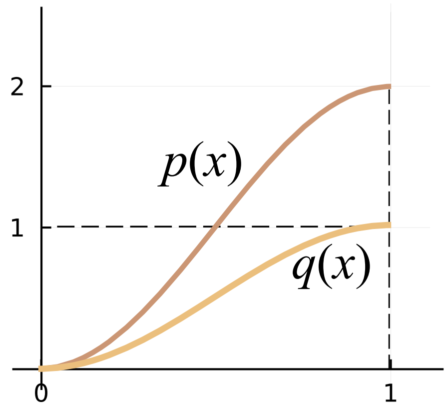

Figura 4.6 - Finalmente a função $q(x)$, como contração vertical de $p(x)$.

É fácil verificar que a função $q(x)$ é normalizada através de seus valores extremos:

$$q(0) = 0$$
$$q(1) = 1$$

1.5 Exercícios

1 Tomando como base a função $f(x) = x^2$, definida no intervalo $[0, 1]$, encontre a função $g_A(x)$, definida no intervalo $[0, \beta/2]$, que é o resultado de uma expansão de $f(x)$ na horizontal, seguida de uma expansão na vertical, ficando $g_A(\beta/2) = h/2$.

2 A partir da função $g_A(x)$, obtida no exercício anterior, obtenha a função $g_B(x)$ que é consequência de um espelhamento em y, mais um espelhamento em x, mais um deslocamento em x de β e, por fim, um deslocamento em y de h.

3 Tomando como base a função $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, definida no intervalo $[0, 1]$, encontre a função $p_A(x)$, definida no intervalo $[0, \beta/2]$, que é o resultado de uma expansão de $f(x)$ na horizontal, seguida e de uma expansão na vertical, ficando $p_A(\beta/2) = h/2$.

4 A partir da função $p_A(x)$, obtida no exercício acima, obtenha a função $p_B(x)$ que é consequência de um espelhamento em y, mais um espelhamento em x, mais um deslocamento em x de β e, por fim, um deslocamento em y de h.

5 Esboce um gráfico, simulando uma função $f(x)$ qualquer e, em seguida esboce, preferencialmente em outra cor, o gráfico da função $g(x) = f(|\, x\,|)$ e determine se esta nova função $g(x)$ assim definida, não poderia ser utilizado como base para o espelhamento de funções na vertical.

6 Da mesma forma que no exercício anterior, analise a possibilidade de se utilizar a função $g(x) = -|\, f(x)\,|$ como base para o espelhamento de funções na horizontal.

7 Para o itens a e b abaixo, indique que transformações ocorreram em cada caso e faça um gráfico *quadriculado* indicando a função $f(x)$, $g_A(x)$ e $g_B(x)$.

$$a)\ g_A(x) = f(x+3) + 4$$
$$b)\ g_B(x) = \frac{1}{2} f(x)$$

8 Para o itens a e b abaixo, indique que transformações ocorreram em cada caso e faça um gráfico *quadriculado* indicando a função $f(x)$, $g_A(x)$ e $g_B(x)$.

$$a)\ g_A(x) = f(5x) - 4$$

$$b)\ g_B(x) = -f(\frac{1}{4}x)$$

9 Suponha que seja dado o gráfico de f. Escreva as equações para os gráficos obtidos a partir do gráfico de f da seguinte forma:

a. Desloque 3 unidades para cima.
b. Desloque 3 unidades para baixo.
c. Desloque 3 unidades para a direita.
d. Desloque 3 unidades para a esquerda.
e. Reflita em torno do eixo x.
f. Reflita em torno do eixo y.
g. Expanda verticalmente por um fator de 3.
h. Comprima verticalmente por um fator de 4.

10 Explique detalhadamente, a partir da função $y = f(x)$, quais operações ocorreram em cada item a seguir:

$a.$ $y = f(x) + 8$
$b.$ $y = 8f(x)$
$c.$ $y = -f(x) - 1$
$d.$ $y = f(x + 8)$
$e.$ $y = f(8x)$
$f.$ $y = 8f(x/8)$

11 Dado o gráfico de $y = f(x)$, na **figura 5.1** abaixo, associe cada equação com seu gráfico e justifique suas escolhas.

$a.$ $y = f(x - 4)$
$b.$ $y = f(x) + 3$
$c.$ $y = f(x)/3$
$d.$ $y = -f(x + 4)$
$e.$ $y = 2f(x + 6)$

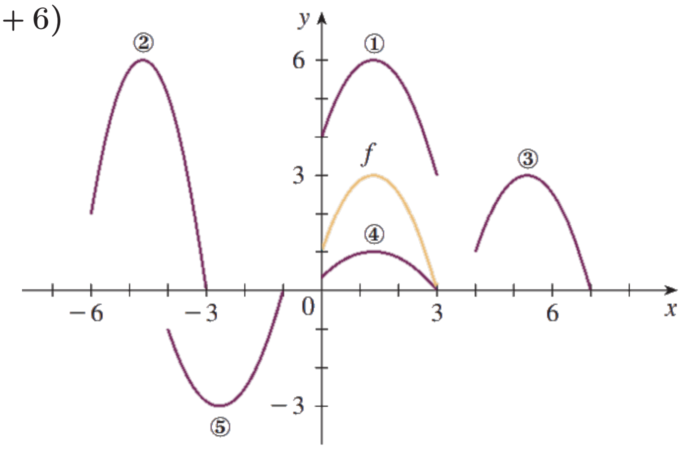

Figura 5.1 - Funções obtidas a partir da função $f(x)$.