

5. Ângulo de Pressão

Nos projetos de cames com seguidores radiais, em geral a eficiência e performance estão estritamente associadas ao ângulo de pressão, desta forma, isto vem determinar o ângulo máximo de pressão que se pode ter sem que haja vibrações excessivas e/ou danos aos rolamentos e mancais de fricção. Dito isto, todo o problema se resume na determinação de um sistema cames seguidor que seja o mais compacto possível proporcionando uma boa resposta dinâmica em conjunto com uma baixa inércia seguida de um melhor aproveitamento da potência motora.

Em resposta a isto, no projeto de cames, a circunferência principal juntamente com o ângulo de pressão, tem se mostrado como o fator mais importante na determinação da geometria do cames em função de cada curva de elevação sendo, mais especificamente, diretamente proporcional ao tamanho do cames e inversamente proporcional à magnitude do ângulo de pressão. Desta forma haverá um valor mínimo para o raio da circunferência principal que irá satisfazer ao máximo ângulo de pressão indicado no projeto. Um valor menor do que este irá acarretar em um ângulo de pressão maior que o indicado, comprometendo a eficiência e inviabilizando o projeto, por outro lado, um raio principal muito grande, a despeito de satisfazer as necessidades em termos de ângulo de pressão, necessitará de muito mais potência motora, além do excesso de material acarretando em custos mais elevados.

De acordo com o exposto, o nosso problema irá consistir em se determinar com a máxima precisão um valor aceitável para o raio da circunferência principal R_p a partir de um ângulo de pressão de projeto fornecido de antemão. Infelizmente as expressões que serão desenvolvidas a seguir não nos permitem a obtenção analítica destes valores. As proposições apresentados por outros autores que vêm estudando o problema ainda se baseiam em nomogramas, métodos numéricos ou simplesmente em métodos de tentativas e erros.

5.1 Ângulo de Pressão

De acordo com Rothbart [3], em cames radiais de rolos, o ângulo de pressão φ é definido como o ângulo entre a direção do movimento do seguidor com a direção do eixo da transmissão. O eixo da transmissão, **Figura 1.1**, é normal à curva primitiva do came passando pelo centro do rolete. A curva primitiva, veja no capítulo 2, é obtida a partir de um deslocamento no perfil do came, igual ao raio do rolete. Observe que um ângulo φ cujo valor seja $\pi/2$, torna impossível o movimento do seguidor, ao passo que se φ for nulo, o seguidor não irá se movimentar, Gonzales-Palacios e Angeles [5].

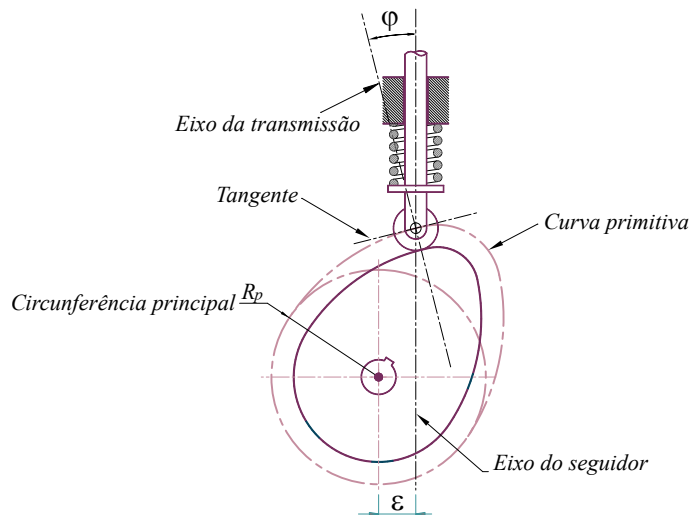


Figura 1.1 - Definição do ângulo de pressão.

Quando o seguidor se eleva de sua posição mais baixa até a posição mais alta (h), o ângulo de pressão φ , vai do zero até um valor máximo, que inicialmente chamaremos de $\hat{\varphi}$, retornando em seguida ao zero quando o seguidor atinge sua posição máxima.

5.2 Obtenção do Ângulo de Pressão

Nos sistemas de came com seguidor radial, seja ele centrado ou excêntrico como o da **figura 2.1**, o ângulo de pressão φ é definido como sendo o ângulo entre a direção do eixo do seguidor com a direção da normal à curva primitiva, eixo da transmissão, no ponto traçador, ponto **P**, que é o centro do rolete. Suponha-se então que o came gire, no sentido anti-horário, **figura 2.1a**, com velocidade angular $\dot{\theta}$, então o ponto **B**, sobre o eixo da transmissão, que dista de $a + b$ do centro de giro do came, **O**, terá velocidade v_B , sendo o eixo da transmissão a sua reta suporte. Podemos concluir, pelo teorema da rigidez, que a velocidade v_n no ponto **P**, **figura 2.1b**, é igual a v_B e, sendo v_n a projeção da velocidade linear do seguidor $v = f'(\theta)\dot{\theta}$ no eixo da transmissão, teremos

$$v_n = v_B \quad (2.1)$$

Ou seja

$$f'(\theta)\dot{\theta} \cos \varphi = (a + b)\dot{\theta} \quad (2.2)$$

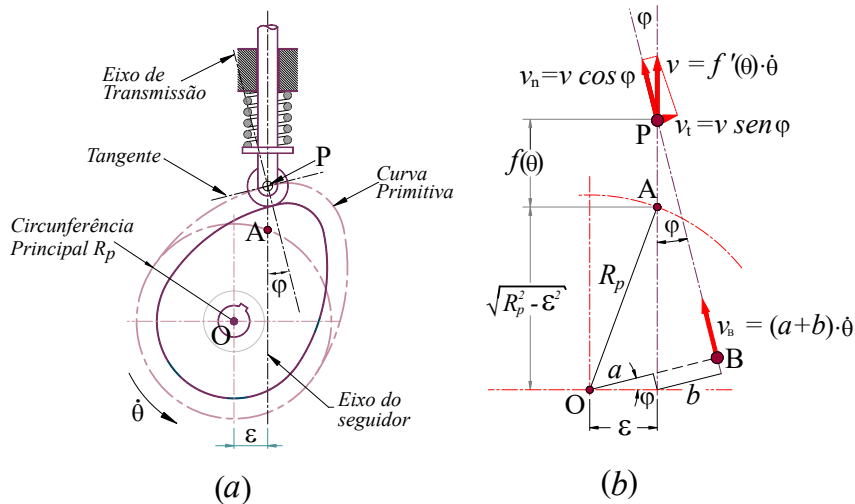


Figura 2.1 - Ângulo de pressão para um came radial deslocado.

E, notando, pela geometria, que

$$a = \varepsilon \cos \varphi \text{ e } b = \left(f(\theta) + \sqrt{R_p^2 - \varepsilon^2} \right) \sin \varphi \quad (2.3)$$

Ficamos com

$$f'(\theta) \cos \varphi = \varepsilon \cos \varphi + \left(f(\theta) + \sqrt{R_p^2 - \varepsilon^2} \right) \sin \varphi \quad (2.4)$$

Expressão esta que nos permite chegar à equação (2.5), mostrada abaixo.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f'(\theta) - \varepsilon}{f(\theta) + \sqrt{R_p^2 - \varepsilon^2}} \quad (2.5)$$

A expressão (2.5) deixa claro que $\operatorname{tg} \varphi$ depende das variáveis θ e R_p , uma vez que ε , excentricidade do eixo do seguidor, é constante. Nosso objetivo consiste em minimizar $\operatorname{tg} \varphi$, e sendo então esta uma função de duas variáveis, o passo natural seria igualar a zero o gradiente da função para obtermos o ponto crítico, porém uma verificação rápida vai nos mostrar que o Hessiano será nulo, fazendo com que procuremos outras soluções de minimização.

Diante desta impossibilidade, vamos derivar a expressão (2.5), na busca de mínimos, ainda em função de R_p , obtemos então

$$f''(\theta_o) \left[f(\theta_o) + \sqrt{R_p^2 - \varepsilon^2} \right] - f'(\theta_o) [f'(\theta_o) - \varepsilon] = 0 \quad (2.6)$$

Isolando-se o termo $f(\theta_o) + \sqrt{R_p^2 - \varepsilon^2}$ na equação (2.6) e substituindo na equação (2.5), notando que, no ponto crítico, θ_o , o ângulo φ será mínimo, chamado aqui de $\hat{\varphi}$, vamos obter

$$\operatorname{tg} \hat{\varphi} = \frac{f''(\theta_o)}{f'(\theta_o)} \quad (2.7)$$

Antes de darmos continuidade ao nosso desenvolvimento, cabe aqui, falarmos um pouco sobre seguidores excêntricos ou deslocados ($\varepsilon \neq 0$). Projetos com seguidores deslocados têm como único objetivo a diminuição do ângulo de pressão no trecho da elevação, no entanto este irá trazer sempre, como consequência, um aumento, que pode ser

considerável, no correspondente ângulo de pressão do retorno e, muitas vezes isto é admitido por não se ter um esforço muito grande no retorno, porém isto não é regra e na maioria dos casos este pensamento não está correto, vez que haverá, não só a mola propiciando uma carga de retorno, como também o próprio esforço que foi vencido na elevação continua atuando no retorno, por este motivo, mesmo havendo esta vantagem da diminuição do ângulo de pressão, raramente este tipo de came é utilizado.

Posto isto, neste ponto, na intenção de simplificarmos o nosso desenvolvimento, convém que trabalhem com seguidores estritamente radiais, excentricidade nula $\varepsilon = 0$. Sendo assim, a equação (2.5) se transforma em

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f'(\theta)}{f(\theta) + R_p} \quad (2.8)$$

Perceba que a equação (2.7) ainda continua válida, porém a equação (2.6), com esta transformação, será mudada para

$$f''(\theta_o)(f(\theta_o) + R_p) - f'(\theta_o)^2 = 0 \quad (2.9)$$

5.3 Raio da Circunferência Principal

Como foi mencionado, nosso principal problema consiste em se obter o raio da circunferência principal a partir de um ângulo $\hat{\varphi}$ conhecido. Para isto nós vamos utilizar as equações (2.8) e (2.9), na obtenção de θ_o e R_p . No caso em que a função $f(\theta)$ seja uma composição de funções trigonométricas, soluções para a equação (2.8) muitas vezes serão expressões transcendentais e, portanto, difíceis de obter.

Ucker et al. [7] Propôs um nomograma, **figura 3.1**, que permite o cálculo de R_p para a curva harmônica simples e também para o movimento cicloidal. Norton [2] sugere uma estimativa inicial para R_p e uma iteração subsequente, como veremos no algoritmo desenvolvido mais adiante, que vem a fornecer uma solução aproximada.

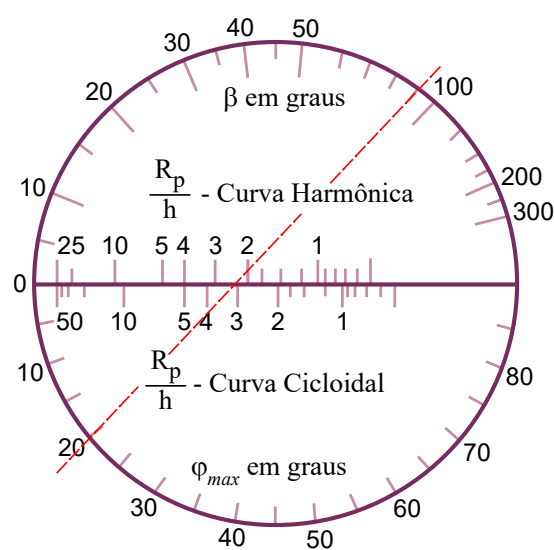


Figura 3.1 - Nomograma, na curva harmônica, para $\hat{\varphi} = 20^\circ$ e $\beta = 90^\circ$, tem-se $R_p/h = 2.3$, na curva cicloidal, para estes mesmos valores de $\hat{\varphi}$ e β , $R_p/h = 3.1$.

Neste curso, nós iremos calcular o raio da circunferência principal, especificamente para as curvas trigonométricas **harmônica**, **cicloidal**, **dupla harmônica** e **dupla cicloide** e para as curvas polinomiais vamos nos ater aos polinômios do tipo **A-B-C** e **A-B-C-D** por serem os que obedecem à **LFPC**.

5.4 Raios da Circunferência Principal, Curvas Trigonométricas

5.4.1 Obtenção de R_p para a Harmônica

No caso do movimento harmônico, a função $f(\theta)$ e suas derivadas têm a forma

$$f(\theta) = \frac{h}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi}{\beta} \theta \right] \quad (4.1.1)$$

$$f'(\theta) = \frac{h\pi}{2\beta} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\beta} \theta \quad (4.1.2)$$

$$f''(\theta) = \frac{h\pi^2}{2\beta^2} \cos \frac{\pi}{\beta} \theta \quad (4.1.3)$$

Desta maneira, a equação (2.9) deve ser colocada na forma

$$\cos \frac{\pi}{\beta} \theta_o \left[1 - \cos \frac{\pi}{\beta} \theta_o + \frac{2R_p}{h} \right] - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\beta} \theta_o = 0 \quad (4.1.4)$$

Usando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\beta} \theta_o = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{\beta} \theta_o$, chega-se fácil a

$$\cos \frac{\pi}{\beta} \theta_o = \frac{h}{h + 2R_p} \quad (4.1.5)$$

Como, para este caso

$$\operatorname{tg} \hat{\varphi} = \frac{\frac{\pi}{\beta} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\beta} \theta_o}{1 - \cos \frac{\pi}{\beta} \theta_o + \frac{2R_p}{h}} \quad (4.1.6)$$

Expressão esta que, após substituirmos $\cos \frac{\pi}{\beta} \theta_o$ por $\frac{h}{h+2R_p}$ e elevarmos ambos os lados ao quadrado, se torna

$$\operatorname{tg}^2 \hat{\varphi} = \frac{\pi^2}{4\beta^2} \frac{1}{\frac{R_p}{h} + \frac{R_p^2}{h}} \quad (4.1.7)$$

Ou, de outra forma

$$\left(\frac{R_p}{h}\right)^2 + \frac{R_p}{h} - \frac{\pi^2}{4\beta^2 \operatorname{tg}^2 \hat{\varphi}} = 0 \quad (4.1.8)$$

E, desde que $\frac{R_p}{h} > 0$, a solução para esta relação será

$$\frac{R_p}{h} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}\right)^2} - \frac{1}{2} \quad (4.1.9)$$

5.4.2 Obtenção de R_p para a Cicloide

No caso da curva cicloidal, a função $f(\theta)$ e suas derivadas têm a forma

$$f(\theta) = h \left[\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\beta} \theta \right] \quad (4.2.1)$$

$$f'(\theta) = \frac{h}{\beta} \left[1 - \cos \frac{2\pi}{\beta} \theta \right] \quad (4.2.2)$$

$$f''(\theta) = \frac{2\pi h}{\beta^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\beta} \theta \quad (4.2.3)$$

Para este caso será mais conveniente utilizarmos a equação (2.7) que se traduz na razão da aceleração pela velocidade.

$$\operatorname{tg} \hat{\varphi} = \frac{2\pi}{\beta} \frac{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{\beta} \theta_o}{1 - \cos \frac{2\pi}{\beta} \theta_o} \quad (4.2.4)$$

Tomando-se como base as identidades trigonométricas $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{\beta} \theta_o = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{\beta} \theta_o \cos \frac{\pi}{\beta} \theta_o$ e $\cos \frac{2\pi}{\beta} \theta_o = \cos^2 \frac{\pi}{\beta} \theta_o - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\beta} \theta_o$, a equação (4.2.4) se transforma em

$$\operatorname{tg} \hat{\varphi} = \frac{2\pi}{\beta} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{\beta} \theta_o} \quad (4.2.5)$$

Que pode ser escrita como

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{\beta} \theta_o = \frac{2\pi}{\beta} \frac{1}{\operatorname{tg} \hat{\varphi}} \quad (4.2.6)$$

Agora, usando a equação (2.8) em conjunto com (4.2.1) e (4.2.2), considerando o θ_o , crítico, vamos obter

$$\operatorname{tg} \hat{\varphi} = \frac{\frac{h}{\beta} \left[1 - \cos \frac{2\pi}{\beta} \theta_o \right]}{h \left[\frac{\theta_o}{\beta} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\beta} \theta_o \right] + R_p} \quad (4.2.7)$$

Expressão esta que pode ser rearranjada em

$$\frac{R_p}{h} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\beta} \theta_o + \frac{1 - \cos \frac{2\pi}{\beta} \theta_o}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} - \frac{\theta_o}{\beta} \quad (4.2.8)$$

Com base na relação trigonométrica de duplo ângulo para o seno e o cosseno, a expressão acima se torna

$$\frac{R_p}{h} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{\beta} \theta_o}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{\beta} \theta_o} \right) + \frac{1 - \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{\beta} \theta_o}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{\beta} \theta_o} \right)}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} - \frac{\theta_o}{\beta} \quad (4.2.9)$$

E, com base na equação (4.2.6) acima, nós obtemos

$$\frac{R_p}{h} = \frac{2}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} - \frac{\theta_o}{\beta} \quad (4.2.10)$$

Porém, notando que da equação (4.2.6), podemos obter $\frac{\theta_o}{\beta} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\pi}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right)$, a expressão (4.2.10), se torna

$$\frac{R_p}{h} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} - \operatorname{arctg} \left(\frac{2\pi}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right) \right) \quad (4.2.11)$$

5.4.3 Obtenção de R_p para a Dupla Harmônica

No caso da dupla harmônica, a função $f(\theta)$, como já vimos no capítulo 3, assume a forma

$$f(\theta) = \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\beta} \theta - \frac{1}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\beta} \theta \right) \right) \quad (4.3.1)$$

Aqui, por conveniência, vamos substituir $\cos \frac{2\pi}{\beta} \theta = \cos^2 \frac{\pi}{\beta} \theta - \sin^2 \frac{\pi}{\beta} \theta$, na equação acima, obtendo uma outra forma para a equação (4.3.1) e suas derivadas

$$f(\theta) = \frac{h}{4} \left(1 - \left(2 - \cos \frac{\pi}{\beta} \theta \right) \cos \frac{\pi}{\beta} \theta \right) \quad (4.3.2)$$

$$f'(\theta) = \frac{h\pi}{2\beta} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\beta} \theta \right) \sin \frac{\pi}{\beta} \theta \quad (4.3.3)$$

$$f''(\theta) = \frac{h\pi^2}{2\beta} \left(\cos \frac{\pi}{\beta} \theta - 2 \cos^2 \frac{\pi}{\beta} \theta + 1 \right) \quad (4.3.4)$$

Então, a equação (2.9), após simplificação se torna

$$\left(\cos \frac{\pi}{\beta} \theta - 1 \right) \left(\frac{4R_p}{h} + 2 \cos \frac{\pi}{\beta} \theta - \cos^2 \frac{\pi}{\beta} \theta + 8 \frac{R_p}{h} \cos \frac{\pi}{\beta} \theta - 1 \right) = 0$$

E, desde que $\theta = 0$ ou $\theta = \beta$ não podem ser máximos para a função $tg \varphi$, nós concluímos que

$$\cos^2 \frac{\pi}{\beta} \theta + \left(2 - 8 \frac{R_p}{h} \right) \cos \frac{\pi}{\beta} \theta - \left(1 - \frac{4R_p}{h} \right) = 0$$

Notando ainda que $\cos \frac{\pi}{\beta} \theta \leq 1$ e $\frac{R_p}{h} > 0$, podemos ignorar o sinal positivo no radical e ficamos com

$$\cos \frac{\pi}{\beta} \theta_o = \frac{R_p}{h} \sqrt{16 + \frac{h}{R_p} \left(4 + \frac{2h}{R_p} \right)} - \left(1 + \frac{4R_p}{h} \right) \quad (4.3.5)$$

Elevando a equação (2.8) ao quadrado e inserindo os valores de $f(\theta_o)$ e $f'(\theta_o)$ obtidos, vamos ter

$$tg^2 \hat{\varphi} = \frac{4\pi^2}{\beta^2} \frac{\left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{\beta} \theta_o \right) \left(1 - \cos \frac{\pi}{\beta} \theta_o \right)^2}{\left(1 - \left(2 - \cos \frac{\pi}{\beta} \theta_o \right) \cos \frac{\pi}{\beta} \theta_o + 4 \frac{R_p}{h} \right)^2} \quad (4.3.6)$$

Colocando a expressão (4.4.5) na equação acima e definido o fator K como

$$K = \sqrt{1 + 3 \left(\frac{\pi}{\beta tg \hat{\varphi}} \right)^2} \quad (4.3.7)$$

Vamos obter, finalmente para $\frac{R_p}{h}$, o valor

$$\frac{R_p}{h} = \frac{3(K - 1)^2}{8K - 4} \quad (3.3.8)$$

5.4.4 Obtenção de R_p para a Dupla Cicloide

Para a dupla cicloide, a função $f(\theta)$, como já vimos no capítulo 3, assume a forma

$$f(\theta) = \frac{4h}{3} \left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\beta} \theta - \frac{1}{4} \left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{4\pi} \operatorname{sen} \frac{4\pi}{\beta} \theta \right) \right) \quad (4.4.1)$$

Sua derivada primeira e segunda são

$$f'(\theta) = \frac{4h}{3\beta} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\beta} \theta - \frac{1}{4} \left(1 - \cos \frac{4\pi}{\beta} \theta \right) \right) \quad (4.4.2)$$

$$f''(\theta) = \frac{8h\pi}{3\beta^2} \left(\operatorname{sen} \frac{2\pi}{\beta} \theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{4\pi}{\beta} \theta \right) \quad (4.4.3)$$

De modo que, aplicando a equação (2.7), e efetuando todas as simplificações, vamos chegar a

$$\operatorname{tg} \hat{\varphi} = - \frac{4\pi \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\beta} \theta_o}{\beta \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\beta} \theta_o \right)} \quad (4.4.4)$$

Elevando (4.4.4) ao quadrado, no sentido de transformar o seno em cosseno, e efetuando todas as transformações trigonométricas, iremos chegar na expressão

$$(\beta^2 \operatorname{tg}^2 \hat{\varphi} + 16\pi^2) \cos^2 \frac{2\pi}{\beta} \theta_o + 2\beta^2 \operatorname{tg}^2 \hat{\varphi} \cos \frac{2\pi}{\beta} \theta_o + \beta^2 \operatorname{tg}^2 \hat{\varphi} - 16\pi^2 = 0$$

Que é uma equação do segundo grau em cosseno e podemos obter o seu valor

$$\cos \frac{2\pi}{\beta} \theta_o = - \frac{1 - 16 \left(\frac{\pi}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right)^2}{1 + 16 \left(\frac{\pi}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right)^2} \quad (4.4.5)$$

Designando o valor de K por

$$K = \sqrt{1 + 16 \left(\frac{\pi}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right)^2} \quad (4.4.6)$$

A equação (3.4.5) assume a forma

$$\cos \frac{2\pi}{\beta} \theta_o = 1 - \frac{2}{K^2} \quad (4.4.7)$$

A partir desta expressão, com base na lei dos senos, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, podemos encontrar a função seno, que vai ter a forma

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{\beta} \theta_o = \frac{2}{K^2} \sqrt{K^2 - 1} \quad (4.4.8)$$

E aqui vamos desprezar a solução negativa, para o radical, no sentido de se ter a relação R_p/h sempre positiva.

Pela equação (3.4.7), o ângulo crítico, onde ocorre o φ máximo, pode ser dado por

$$\theta_o = \frac{\beta}{2\pi} \arccos \left(1 - \frac{2}{K^2} \right) \quad (4.4.9)$$

Com base na equação (2.9), nós vamos, após algumas simplificações trigonométricas, chegar em

$$\frac{R_p}{h} + \frac{\theta_o}{\beta} = \frac{2}{3\pi} \frac{\left(\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{\beta} \theta_o\right) \cos \frac{2\pi}{\beta} \theta_o\right)^2}{\left(1 - \cos \frac{2\pi}{\beta} \theta_o\right) \sin \frac{2\pi}{\beta} \theta_o} + \frac{1}{6\pi} \left(4 - \cos \frac{2\pi}{\beta} \theta_o\right) \sin \frac{2\pi}{\beta} \theta_o \quad (4.4.10)$$

Que, substituindo-se os valores de seno e cosseno das equações (4.4.7) e (4.4.8), vai nos fornecer, finalmente

$$\frac{R_p}{h} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{K^4 - 8K^2 - 18K^{-2} + 26}{3\sqrt{K^2 - 1}} - \arccos \left(1 - \frac{2}{K^2}\right) \right] \quad (4.4.11)$$

5.5 Raio da Circunferência Principal, Curvas Polinomiais

5.5.1 Polinômios do Tipo A-B-C

Como visto no capítulo 3, este tipo de polinômio tem uma regra de formação, em função de suas potências como mostrado abaixo

$$f(\theta) = h \left[\frac{bc}{2} \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^a - ac \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^b + \frac{ab}{2} \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^c \right] \quad (5.1.1)$$

$$f'(\theta) = \frac{habc}{2\beta} \left[\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{a-1} - 2 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{b-1} + \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{c-1} \right] \quad (5.1.2)$$

$$f''(\theta) = \frac{habc}{2\beta^2} \left[(a-1) \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{a-2} - 2(b-1) \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{b-2} + (c-1) \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{c-2} \right] \quad (5.1.3)$$

Pela equação (2.7) a razão entre a aceleração e a velocidade, no ponto crítico, vai ser

$$\text{tg } \hat{\varphi} = \frac{\frac{habc}{2\beta^2} \left[(a-1) \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{a-2} - 2(b-1) \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{b-2} + (c-1) \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{c-2} \right]}{\frac{habc}{2\beta} \left[\left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{a-1} - 2 \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{b-1} + \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{c-1} \right]} \quad (5.1.4)$$

Que após simplificada, juntamente com as substituições das identidades trigonométricas, e considerando que $c = a + 2$, vai assumir a forma

$$\text{tg } \hat{\varphi} = \frac{b\theta_o - (a-1)\beta}{\theta_o(\theta_o - \beta)} \quad (5.1.5)$$

E esta expressão pode ser facilmente colocada como uma equação do segundo grau em θ_o .

$$(\text{tg } \hat{\varphi})\theta_o^2 - (\beta \text{tg } \hat{\varphi} + b)\theta_o + (a-1)\beta = 0 \quad (5.1.6)$$

Cuja solução será

$$\theta_o = \frac{\beta}{2} \left(1 + \frac{b}{\beta \text{tg } \hat{\varphi}} - \sqrt{1 + \left(\frac{b}{\beta \text{tg } \hat{\varphi}}\right)^2 + \frac{2(3-a)}{\beta \text{tg } \hat{\varphi}}} \right) \quad (5.1.7)$$

Note que aqui estamos desconsiderando a solução negativa para o radical, considerando que ela iria fornecer um $\theta_o > \beta$, o que seria inconsistente.

Tomando, por simplificação, um valor K definido por

$$K = \frac{b}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} - \sqrt{1 + \left(\frac{b}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right)^2 + \frac{2(3-a)}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}} \quad (5.1.8)$$

Vamos ficar com a equação (5.1.7) simplificada, na seguinte forma

$$\theta_o = \frac{\beta}{2}(1 + K) \quad (5.1.9)$$

Utilizando agora a equação (2.9) e reajustando, vamos obter

$$\frac{R_p}{h} = \frac{abc}{2} \frac{\left(\left(\frac{\theta_o}{\beta} \right)^{a-1} - 2 \left(\frac{\theta_o}{\beta} \right)^{b-1} \left(\frac{\theta_o}{\beta} \right)^{c-1} \right)^2}{(a-1) \left(\frac{\theta_o}{\beta} \right)^{a-2} - 2(b-1) \left(\frac{\theta_o}{\beta} \right)^{b-2} (c-1) \left(\frac{\theta_o}{\beta} \right)^{c-2}} - \left(\frac{bc}{2} \left(\frac{\theta_o}{\beta} \right)^a - ac \left(\frac{\theta_o}{\beta} \right)^b + \frac{ab}{2} \left(\frac{\theta_o}{\beta} \right)^c \right) \quad (5.1.10)$$

Agora, com estes parâmetros e equações definidas, podemos obter a razão R_p/h para os polinômios 3-4-5 e 4-5-6, como nos propusemos.

5.5.1.1 Obtenção de R_p para o Polinômio 3-4-5

Para este caso as potências do polinômio são $a = 3$ e $b = 4$ e, portanto, o valor de K , expressão (5.1.8), assume a forma

$$K = \frac{4}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} + \sqrt{1 + \left(\frac{4}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right)^2} \quad (5.1.1.1)$$

Também a expressão (5.1.9) permite-nos escrever

$$\frac{\theta_o}{\beta} = \frac{1 + K}{2} \quad (5.1.1.2)$$

E então, para a expressão (5.1.10), notando que $b = 4$ e $c = 5$, após substituir-se $\frac{\theta_o}{\beta}$ por $\frac{1+K}{2}$ vamos ter agora a seguinte forma

$$\frac{R_p}{h} = \frac{(K+1)^3(3K^3 - 9K^2 + 13K - 15)}{64K} \quad (5.1.1.3)$$

5.5.1.2 Obtenção de R_p para o Polinômio 4-5-6

Para este caso as potências do polinômio são $a = 3$ e $b = 4$ e, portanto, o valor de K , expressão (5.1.8), assume a forma

$$K = \frac{5}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} + \sqrt{1 + \left(\frac{5}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right)^2} - \frac{2}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \quad (5.1.2.1)$$

Também a expressão (5.1.9) permite-nos escrever

$$\frac{\theta_o}{\beta} = \frac{1 + K}{2} \quad (5.1.2.2)$$

E então, a expressão (5.1.10), após substituir-se $\frac{\theta_o}{\beta}$ por $\frac{1+K}{2}$ e tecer as devidas considerações de que $b = 5$ e $c = 6$, vai assumir a forma

$$\frac{R_p}{h} = \frac{(K+1)^4(5K^3 - 15K^2 + 21K - 19)}{32(5K - 1)} \quad (5.1.2.3)$$

5.5.2 Polinômios do Tipo A-B-C-D

Novamente lembrando o capítulo 3, polinômios do tipo A-B-C-D têm uma regra de formação que depende de suas potências, como pode ser visto abaixo

$$f(\theta) = \frac{bcd}{6} \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^a - \frac{acd}{2} \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^b + \frac{abd}{2} \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^c - \frac{abc}{6} \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^d \quad (5.2.1)$$

$$f(\theta) = \frac{abcd}{6\beta} \left(\left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{a-1} - 3 \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{b-1} + 3 \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{c-1} - \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{d-1} \right) \quad (5.2.2)$$

$$f(\theta) = \frac{abcd}{6\beta^2} \left((a-1) \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{a-2} - 3(b-1) \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{b-2} + 3(c-1) \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{c-2} - (d-1) \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{d-2} \right) \quad (5.2.3)$$

E, pela equação (2.7) a razão entre a aceleração e a velocidade, no ponto crítico, pode ser obtida por

$$\text{tg } \hat{\varphi} = \frac{\frac{abcd}{6\beta^2} \left[(a-1) \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{a-2} - 3(b-1) \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{b-2} + 3(c-1) \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{c-2} - (d-1) \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{d-2} \right]}{\frac{abcd}{6\beta} \left[\left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{a-1} - 3 \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{b-1} + 3 \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{c-1} - \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{d-1} \right]} \quad (5.2.4)$$

Que após simplificada, juntamente com as substituições das identidades trigonométricas, e considerando que $b = a + 1$ e $d = a + 3$, vai assumir a forma

$$\text{tg } \hat{\varphi} = \frac{c\theta_o - (a-1)\beta}{\theta_o(\theta_o - \beta)} \quad (5.2.5)$$

Trabalhando nesta expressão, podemos facilmente colocá-la como uma equação do segundo grau em θ_o .

$$(\text{tg } \hat{\varphi})\theta_o^2 - (\beta \text{tg } \hat{\varphi} + c)\theta_o + (a-1)\beta = 0 \quad (5.2.6)$$

Cuja solução vai ser

$$\theta_o = \frac{\beta}{2} \left(1 + \frac{c}{\beta \text{tg } \hat{\varphi}} - \sqrt{1 + \left(\frac{c}{\beta \text{tg } \hat{\varphi}}\right)^2 + 2\frac{4-a}{\beta \text{tg } \hat{\varphi}}} \right) \quad (5.2.7)$$

Estamos desconsiderando a solução negativa para o radical, pelo fato de que isto iria fornecer uma inconsistência do tipo $\theta_o > \beta$, o que sabemos não ser verdadeiro.

Tomando, por simplificação, um valor K definido por

$$K = \frac{c}{\beta \text{tg } \hat{\varphi}} - \sqrt{1 + \left(\frac{c}{\beta \text{tg } \hat{\varphi}}\right)^2 + 2\frac{4-a}{\beta \text{tg } \hat{\varphi}}} \quad (5.2.8)$$

Vamos ficar com a equação (5.2.7) simplificada, na seguinte forma

$$\theta_o = \frac{\beta}{2}(1 + k) \quad (5.2.9)$$

Agora, utilizando a equação (2.9) e reagrupando os seus valores, vamos obter

$$\frac{R_p}{h} = \frac{\left(\frac{abcd}{6\beta}\right)^2 \left[\left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{a-1} - 3 \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{b-1} + 3 \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{c-1} - \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{d-1} \right]^2}{\frac{abcd}{6\beta^2} \left[(a-1) \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{a-2} - 3(b-1) \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{b-2} + 3(c-1) \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{c-2} - (d-1) \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^{d-2} \right]} + \left[\frac{bcd}{6} \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^a - \frac{acd}{2} \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^b + \frac{abd}{2} \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^c - \frac{abc}{6} \left(\frac{\theta_o}{\beta}\right)^d \right] \quad (5.2.10)$$

Vamos agora, com estes parâmetros e equações definidas, obter a razão R_p/h para os

polinômios 3-4-5-6 e 4-5-6-7, de acordo com a nossa proposta inicial.

5.5.2.1 Obtenção de R_p para o Polinômio 3-4-5-6

Para este caso as potências do polinômio são $a = 3$ e $c = 5$ e, portanto, o valor de K , expressão (5.2.8), assume a forma

$$K = \frac{5}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} - \sqrt{1 + \left(\frac{5}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right)^2} + \frac{2}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \quad (5.2.1.1)$$

Também a expressão (5.2.9) permite-nos escrever

$$\frac{\theta_o}{\beta} = \frac{1 + K}{2} \quad (5.2.1.2)$$

E então, a expressão (5.2.10), após substituir-se $\frac{\theta_o}{\beta}$ por $\frac{1+K}{2}$ e tecer as devidas considerações de que $b = 4$ e $c = 5$, vai assumir a forma

$$\frac{R_p}{h} = - \frac{(K + 1)^3 (5K^4 - 20K^3 + 36K^2 - 48K + 51)}{32(5K + 1)} \quad (5.2.1.3)$$

5.5.2.2 Obtenção de R_p para o Polinômio 4-5-6-7

Para este caso as potências do polinômio são $a = 4$ e $c = 6$ e, portanto, o valor de K , expressão (5.2.8), assume a forma

$$K = \frac{6}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} - \sqrt{1 + \left(\frac{6}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right)^2} \quad (5.2.2.1)$$

Também a expressão (5.2.9) permite-nos escrever

$$\frac{\theta_o}{\beta} = \frac{1 + K}{2} \quad (5.2.2.2)$$

E então, a expressão (5.2.10), após substituir-se $\frac{\theta_o}{\beta}$ por $\frac{1+K}{2}$ e tecer as devidas considerações de que $b = 5$ e $c = 6$, vai assumir a forma

$$\frac{R_p}{h} = - \frac{(K + 1)^4 (5K^4 - 20K^3 + 36K^2 - 44K + 35)}{192K} \quad (5.2.2.3)$$

5.6 Método Numérico para Obtenção do Raio Principal

Este método consiste em se arbitrar um valor inicial para o raio da circunferência principal R_p , neste caso a solução da equação (2.9) pode ser obtida facilmente de forma analítica e isto torna possível a obtenção do nosso algoritmo, desde que podemos testar valores iniciais da $\operatorname{tg} \varphi$ e compará-los com a $\operatorname{tg} \hat{\varphi}$, a partir daí, arbitramos um valor para o erro em ΔR_p que irá finalizar o algoritmo.

Apesar de simples, como podemos ver logo abaixo, o algoritmo não é tão rápido, pelo fato de que, em cada passo do “loop while” se faz necessária a obtenção das raízes de um produto de funções transcendentais, ou polinomiais, muito embora aqui estas raízes sejam encontradas também de forma numérica.

```

error ← 0.0001
 $\hat{\varphi}$  ← data input
 $\Delta R_p$  ← 0.001
 $R_p$  ← 0.0
While (tan  $\varphi$  - tan  $\hat{\varphi}$  > error) Then
   $\theta_o$  ← solution of  $[f''(\theta)(f(\theta) + R_p) - f'(\theta)^2 = 0]$ 
  tan  $\varphi$  ←  $f'(\theta_o)/(f(\theta_o) + R_p)$ 
   $R_p$  ←  $R_p + \Delta R_p$ 
EndWhile
data out ←  $R_p$ 

```

5.7 Sumário das Expressões Obtidas

A tabela 7.1.1 abaixo, nos apresenta um sumário das expressões obtidas, permitindo-nos a extração do valor de R_p , desde que disponhamos de β , $\hat{\varphi}$ e h .

Curva	θ_o	K	$\frac{R_p}{h}$
Harmônica	$\frac{\beta}{\pi} \arccos \frac{1}{K}$	$\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}\right)^2}$	$\frac{K-1}{2}$
Cicloide	$\frac{\beta}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}$	$\frac{2\pi}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}$	$\frac{1}{\pi}(K - \operatorname{arctg} K)$
Dupla Harmônica	$\frac{2\beta}{\pi} \operatorname{arctg} \left[\frac{\beta}{\pi}(K-1) \operatorname{tg} \hat{\varphi} \right]$	$\sqrt{1 + 3 \left(\frac{\pi}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}\right)^2}$	$\frac{3(K-1)^2}{8K-4}$
Dupla Cicloide	$\frac{\beta}{2\pi} \arccos \left(1 - \frac{2}{K^2} \right)$	$\sqrt{1 + 16 \left(\frac{\pi}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}\right)^2}$	$\frac{1}{2\pi} \left[\frac{K^4 - 8K^2 - 18K^{-2} + 26}{3\sqrt{K^2 - 1}} - \arccos \left(1 - \frac{2}{K^2} \right) \right]$
Polinômio 3-4-5	$\frac{\beta}{2}(1+K)$	$\frac{4}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} + \sqrt{1 + \left(\frac{4}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}\right)^2}$	$\frac{(K+1)^3(3K^3 - 9K^2 + 13K - 15)}{64K}$
Polinômio 4-5-6	$\frac{\beta}{2}(1+K)$	$\frac{5}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} + \sqrt{1 + \left(\frac{5}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}\right)^2} - \frac{2}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}$	$\frac{(K+1)^4(5K^3 - 15K^2 + 21K - 19)}{32(5K-1)}$
Polinômio 3-4-5-6	$\frac{\beta}{2}(1+K)$	$\frac{5}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} - \sqrt{1 + \left(\frac{5}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}\right)^2} + \frac{2}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}$	$-\frac{(K+1)^3(5K^4 - 20K^3 + 36K^2 - 48K + 51)}{32(5K+1)}$
Polinômio 4-5-6-7	$\frac{\beta}{2}(1+K)$	$\frac{6}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} - \sqrt{1 + \left(\frac{6}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}\right)^2}$	$-\frac{(K+1)^4(5K^4 - 20K^3 + 36K^2 - 44K + 35)}{192K}$

Tabela 7.1.1 - Obtenção de R_p , sendo conhecidos $\hat{\varphi}$, β , e h .

Exemplo 7.1.1

Determinado sistema came seguidor, do tipo radial, tem a harmônica para elevação e a dupla harmônica para retorno sendo $h = 12 \text{ mm}$ a elevação máxima do seguidor e sabendo-se que $\beta_1 = \pi/2$ e $\beta_2 = 2\pi/3$ e também que o ângulo de pressão φ , não deve exceder aos 20° , determine o menor raio da circunferência principal que assegure isto. Verifique ainda em que valor de θ ocorre o máximo ângulo de pressão.

Solução

1. Obtenção do R_p para a elevação

Sendo a elevação dada pela harmônica, conforme a tabela 7.1.1, vamos ter

$$K = \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}\right)^2}$$

e

$$\frac{R_p}{h} = \frac{K - 1}{2}$$

Computando o valor de K para $\beta = \pi/2$ e $\hat{\varphi} = 20^\circ$.

$$K = \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} 20^\circ}\right)^2} = 5,585$$

E para R_p , considerando $h = 12 \text{ mm}$

$$R_p = 12 \cdot \frac{5,585 - 1}{2} = 27,511 \text{ mm}$$

2. Obtenção do R_p para o retorno

Como o retorno se faz pela dupla harmônica, a tabela 7.1.1 nos fornece

$$K = \sqrt{1 + 3 \left(\frac{\pi}{\beta \operatorname{tg}^2 \hat{\varphi}}\right)^2}$$

e

$$\frac{R_p}{h} = \frac{3(K - 1)^2}{8K - 4}$$

Agora, computando o valor de K para $\beta = 2\pi/3$ e $\hat{\varphi} = 20^\circ$.

$$K = \sqrt{1 + 3 \left(\frac{\pi}{\frac{2\pi}{3} \operatorname{tg}^2 20^\circ}\right)^2} = 19,637$$

E para R_p , considerando $h = 12 \text{ mm}$

$$R_p = 12 \cdot \frac{3(19,637 - 1)^2}{8 \cdot 19,637 - 4} = 81,677 \text{ mm}$$

3. Qual raio R_p deverá ser o escolhido

Visto que o came não pode ter dois raios principais, devemos ponderar agora qual das duas soluções iremos escolher. Porém a decisão é simples posto que o problema sugere que o ângulo de pressão máximo não deve superar os 20° , aqui se considerarmos a elevação, com $R_p = 27,511 \text{ mm}$, o φ será exatamente 20° , considerando o retorno com $R_p = 81,677 \text{ mm}$, também o φ será exatamente 20° .

Como, de acordo com a equação (2.8), o raio principal é inversamente proporcional ao ângulo φ , se adotarmos um valor de $81,667 \text{ mm}$ para a elevação, vamos ter

$$\operatorname{tg} \hat{\varphi} = \frac{f'(\theta_o)}{f(\theta_o) + 81,667}$$

Como consequência

$$\hat{\varphi} = \operatorname{arctg} \left(\frac{f'(\theta_o)}{f(\theta_o) + 81,667} \right)$$

Agora, verificando na tabela 7.1.1 que, para a elevação, curva harmônica, se tem

$$\theta_o = \frac{\beta}{\pi} \arccos \frac{h}{h + 2R_p}$$

Podemos levar este valor, que com os dados informados para $h = 12$ e $R_p = 81,667$ mm , à equação acima ($\beta = \pi/2$), obtendo $\theta_o = 43,038^\circ$.

Computando a equação anterior em $\theta_o = 43,038^\circ$ na harmônica e sua derivada vamos obter

$$\hat{\varphi} = \text{arctg} \left(\frac{f'(43,038^\circ)}{f(43,038^\circ) + 81,667} \right) = 7,812^\circ$$

Mostrando assim que se escolhermos o maior R_p , que neste caso foi o do retorno, o ângulo de pressão na elevação irá decair garantindo que o ângulo de pressão máximo não irá superar os 20° , como solicitado pelo problema, nem na elevação e nem no retorno. Portanto a escolha certa sempre irá recair no maior R_p .

4. Valor de θ onde ocorre o ângulo de pressão máximo

Pelo que foi desenvolvido, sabemos que o ângulo de pressão máximo, 20° , vai ocorrer na curva de retorno. Para este caso então, dupla harmônica, a tabela 7.1.1 nos informa que

$$\theta_o = \frac{\beta}{\pi} \arccos \left(\frac{R_p}{h} \left(\sqrt{14 + 2 \left(1 + \frac{h}{R_p} \right)^2} - 4 \right) - 1 \right)$$

Com isto, o valor de θ_o , no trecho de retorno, será $78,623^\circ$ e, lembrando que a curva está espelhada para o retorno, o valor a ser computado será $120^\circ - 78,623^\circ = 41,377^\circ$, agora somando este último valor com $\pi/2$, que é o trecho inicial de elevação, o θ_o total, sempre computado a partir do início da elevação, será dado por

$$\theta_o = 131,377^\circ$$

Exemplo 7.1.2

Determinado sistema came seguidor, do tipo radial, tem a dupla harmônica para elevação, a elevação total do seguidor é de 6 mm e o raio da circunferência principal é $R_p = 12$ mm , desejando-se um ângulo de pressão máximo de 28° , determine o valor do ângulo de elevação β .

Solução

1. Determinação do fator K

Considerando os dados para a dupla harmônica a partir da tabela 7.1.1, tem-se

$$K = \sqrt{1 + 3 \left(\frac{\pi}{\beta \text{tg } \hat{\varphi}} \right)^2}$$

e

$$\frac{R_p}{h} = \frac{3(K - 1)^2}{8K - 4}$$

Com isto, podemos, a partir desta última equação, escrever

$$\frac{3(K - 1)^2}{8K - 4} - \frac{R_p}{h} = 0$$

Que se traduz em uma equação do segundo grau em K , uma vez que R_p e h são conhecidos, que tem para solução

$$K = 6,794 \text{ ou } K = 0,540$$

Utilizaremos a primeira solução, posto que a segunda vai levar a um valor imaginário, como pode ser deduzido em função do radical mostrado mais abaixo na equação para se obter β .

2. Determinação de β

A primeira equação, mostrada neste problema, pode ser trabalhada para obtermos o valor de β a partir dela

$$\beta = \frac{\pi}{\text{tg } \hat{\varphi} \cdot \sqrt{\frac{K^2-1}{3}}}$$

E, com K , agora conhecido, e também $\hat{\varphi}$, como um dado inicial do problema, vamos finalmente encontrar

$$\beta = 1,523 \text{ rad}$$

5.8 Codificação em Python

Para este capítulo temos em nosso repositório GitHub, <https://github.com/Mecanismos-UFPE>, na pasta Python-Cames, os arquivos **GetPrimeCircle.py** e **GetPrimeCircleNumeric.py**, que irão fornecer o raio da circunferência principal e o ângulo crítico onde ocorre o máximo ângulo de pressão, como também irá traçar um gráfico do ângulo de pressão no intervalo $[0, \beta]$.

A diferença de uso entre estes dois códigos reside no fato de o primeiro se utilizar das expressões desenvolvidas aqui e mostradas na tabela 7.1.1, para apresentar os resultados e, por isto mesmo, suas respostas são imediatas, ao passo que o segundo implementa o algoritmo numérico, mostrado aqui no item 5.6 e, como consequência é mais lento na obtenção das soluções.

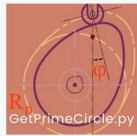
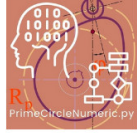
 <p>GetPrimeCircle.py</p> <p>GetPrimeCircle</p>	<p>A utilização deste código permite obter o raio da circunferência principal, o ângulo de pressão de projeto e o gráfico da curva de pressão.</p>
 <p>PrimeCircleNumeric.py</p> <p>PrimeCircleNumeric</p>	<p>Obtém o raio da circunferência principal, o ângulo de pressão de projeto e o gráfico da curva de pressão, porém os resultados são computados numericamente.</p>

Figura 5.8.1 - Download das funções no repositório GitHub

Também o segundo código, **GetPrimeCircleNumeric.py**, torna fácil a implementação de funções de elevação que não constem do código original, pois aqui é só implementar a definição da função e o restante se faz de forma automática.

A utilização destes dois códigos, após o download, é basicamente a mesma e pode ser feita dentro do jupyter lab da seguinte forma

```
from GetPrimeCircle import *
PrimeCircle('harmonica', 8, pi/2, pi/6)
```

Onde o primeiro argumento diz respeito à curva de elevação, o segundo vai ser o valor da altura máxima de elevação do seguidor (h), o terceiro será o ângulo de elevação (β) e o último o ângulo de pressão de projeto ($\hat{\varphi}$).

O uso do código na forma acima vai fornecer

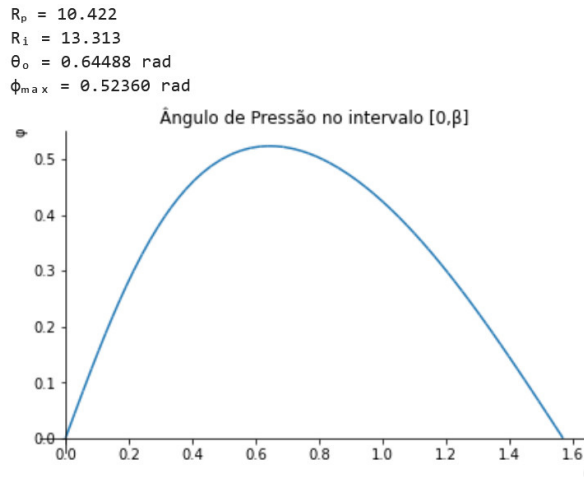


Figura 5.8.2 - Chamada à função **PrimeCircle**.

5.9 Problemas

- 1 Considerando polinômios do tipo **A-B**, com base na sua regra de formação, que segue a expressão $f(\theta) = h \left[b \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^a - a \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^b \right]$, mostre que, de forma generalizada, a razão R_p/h pode ser obtida por

$$\frac{R_p}{h} = -\frac{1}{2} \left(\frac{K+1}{2} \right)^a \cdot \frac{K^2 - 2K + \left(1 + \frac{4}{a}\right)}{K + \frac{2}{a} - 1}$$

Onde K segue a expressão abaixo

$$K = \frac{a}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} - \sqrt{1 + \left(\frac{a}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right)^2 + \frac{2(3-a)}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}}$$

- 2 Utilizando-se os dados do problema acima, para um sistema came seguidor com base no polinômio **4-5**, para elevação e retorno, diagrama **E-R-Rp**, com $\beta_1 = \beta_2$, sabendo-se que a altura de elevação é de 8 mm, o raio da circunferência principal igual a 10 mm e que o ângulo de pressão é da ordem de 20°, determine o valor do ângulo de elevação na elevação e retorno.
- 3 Considerando o desenvolvimento e definição para o ângulo de pressão aplicado a qualquer tipo de curva de elevação, explique, justificando matematicamente, porque o ângulo de pressão máximo não pode ocorrer no ponto de inflexão, local onde a velocidade é máxima, da função de elevação.

- 4 Determinado sistema came seguidor, do tipo radial, tem o polinômio 3-4-5 para elevação e a dupla cicloide para retorno sendo $h = 10 \text{ mm}$ a elevação máxima do seguidor e sabendo-se que $\beta_1 = \pi/2$ e $\beta_2 = 2\pi/3$ e também que o ângulo de pressão φ , não deve exceder aos 18° , determine o menor raio da circunferência principal que assegure isto. Verifique ainda em que valor de θ ocorre o máximo ângulo de pressão.
- 5 Considerando uma composição **E-R-Rp** com elevação máxima de 10 mm , sendo a curva polinomial **3-4-5** a mesma para elevação e retorno e sendo o ângulo de elevação igual ao de retorno, com valor $\beta_1 = 2\pi/3$ e o came girando a 5 rad/seg , quando o ângulo descrito pelo came, considerando zero no início da elevação, for o ângulo crítico (ângulo em que ocorre o φ máximo), qual será o valor da velocidade do seguidor (em mm/seg)?
- 6 Um came radial em que $\beta_1 = \beta_2 = \pi/2$ e utiliza a harmônica para elevação e retorno, tem o valor 6 mm e 3 mm para o raio da circunferência principal e altura de elevação respectivamente, desta forma determine o ângulo de pressão máximo.
- 7 Uma came radial, em que o ângulo de pressão máximo é de 18° , tem a harmônica para curva de elevação e a cicloide para curva de retorno, com $\beta_1 = \beta_2$, a velocidade do seguidor, na metade da elevação, é de 12 mm/seg , enquanto a velocidade do came é de 2 rad/seg e o ângulo de repouso é de $2\pi/3$. Nestas condições, determine o raio da circunferência primitiva.
- 8 Um came tem a sua elevação e retorno predita pela cicloide, sendo $\beta = \pi$ o ângulo de elevação, igual ao de retorno, e $\hat{\varphi} = 30^\circ$ ângulo de pressão de projeto. Sabendo-se que a diferença entre o raio da circunferência primitiva e o raio da circunferência principal é de $2,61$ e também que o θ_o ocorre em $73,9^\circ$, determine o raio da circunferência primitiva.
- 9 Um sistema came seguidor radial, tem a harmônica para curva de elevação e retorno, sendo os ângulos máximos de pressão iguais a 12° e 22° na elevação e retorno respectivamente. Sabendo-se que a curva é do tipo **E-R-Rp** e que $R_p/h = 4$, determine a altura de elevação e o diâmetro principal para um diâmetro primitivo de 50 mm .

5.10 Referências

- 1 NORTON, R. L., Cinemática e Dinâmica dos Mecanismos, Industrial press, 1ª edição, Porto Alegre, 2010.
- 2 NORTON, R. L., Cam Design and Manufacturing Handbook, Industrial press, 2nd edition, New York, 2009.
- 3 ROTHBART, H. A., Cam Design Handbook, McGraw-Hill Education - Europe, 2nd revised edition, New York, dez. 2003.
- 4 CHEN, F.Y., "Mechanics and design of cam mechanisms". Pergamon Press, pp. 155-162, 1982.
- 5 GONZALES-PALACIOS, M.A. and Angeles, J., Cam Synthesis. Kluwer Academic

Publishers, The Netherlands, 1993.

- 6 JESEN, P.W., Cam Design and Manufacture. New York and Base, 1987.
- 7 UICKER, J.J, et al, Theory of Machines and Mechanisms. Oxford University Press, USA, 2010.
- 8 BEZERRA, J. M., Mecanismos ME-270, Site Oficial do Curso, Recife, 2 de março de 2010, Mecanismos de Came/Curvas de elevação, Disponível em: mecanismos.net.br, Acesso em 20 de janeiro de 2022.