

# CAPÍTULO 3

## Cadeias Cinemáticas

O conceito de mecanismo visto no Capítulo 2, como sendo um conjunto de corpos rígidos interligados e com possibilidade de movimentos relativos entre si, irá requerer um estudo mais detalhado do ponto de vista destas ligações e também destes movimentos. Neste capítulo, serão apresentados novos conceitos para estes corpos rígidos atrelados entre si, formando as “cadeias cinemáticas” e, como consequência será estabelecida uma definição mais exata para o termo mecanismo, bem como iremos entender melhor as suas relações, classificação e tipos.

### 3.1. Pares Cinemáticos

Neste estudo será designada barra qualquer peça rígida que componha um mecanismo. Então, pelo conceito inicial de mecanismo, visto no capítulo anterior, barras adjacentes devem ser convenientemente ligadas para que executem o movimento desejado umas em relação às outras, propiciando uma entrada e uma saída do movimento. A cada uma destas ligações, conexão entre duas barras, é dado o nome de par cinemático e cada uma das partes que formam o par é chamada elemento cinemático.

#### *Fique ligado*

*No estudo dos mecanismos e das cadeias cinemáticas em geral, os corpos rígidos envolvidos levam simplesmente o nome de “BARRA”.*

### Classificação

Os pares cinemáticos podem ser classificados em superiores e inferiores, sendo a distinção feita pela forma de contato entre as superfícies de cada elemento que forma o par. Nos pares inferiores, o contato se dá superficialmente, enquanto nos superiores, o contato é linear ou pontual. Decorre disto

que os pares inferiores podem suportar cargas mais elevadas, ao passo que os superiores apresentam menores perdas por atrito. A tabela 3.1 elucida detalhadamente esta situação, mostrando um comparativo das vantagens e desvantagens de se utilizar um ou outro par.

	TIPO DE PAR	
	SUPERIOR	INFERIOR
VANTAGENS	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Menores perdas por atrito</li> <li>• Pequena dissipação de calor</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Suportam cargas elevadas</li> <li>• São de fácil construção</li> <li>• Desgastam-se uniformemente</li> </ul>
DESvantagens	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Não suportam cargas elevadas</li> <li>• Desgastam-se mais rapidamente</li> <li>• Exigem maior refinamento na construção</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Grandes perdas por atrito</li> <li>• Velocidade de trabalho moderada</li> </ul>

**Tabela 3.1** Relação entre par superior e inferior.

### Pares Inferiores

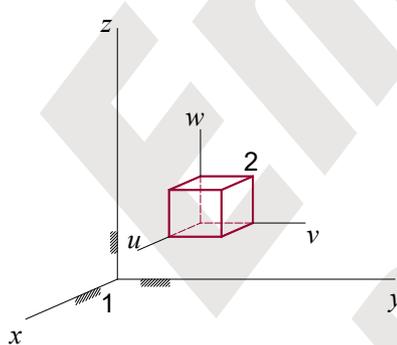
Na prática, os mecanismos e máquinas se utilizam muito mais de pares inferiores do que de pares superiores, sendo também possível, na maioria dos casos, substituir-se um par superior por dois outros pares inferiores que executarão a mesma trajetória e síntese cinemática, muito embora isto não seja de boa prática quando o projeto exige pares superiores. A despeito disto, e considerando a complexidade dos pares superiores para mecanismos de barras, este estudo será restrito aos pares inferiores quando tratarmos de mecanismos de barras.

Existem seis pares cinemáticos identificados por Reuleaux como sendo inferiores. Na tabela 3.2, apresenta-se uma classificação relacionando os nomes e símbolos empregados e que serão discutidos com base nos possíveis movimentos relativos entre dois corpos rígidos, no espaço 3D, figura 3.1, sendo um deles associado ao sistema global fixo e o outro associado a um sistema local inicialmente livre.

Seja a barra 2 no espaço, vinculada ao sistema cartesiano local  $(u, v, w)$ , figura 3.1, com possibilidade de movimento em relação à barra 1, vinculada ao sistema de referência  $(x, y, z)$ , o número de graus de liberdade inicial da barra 2 em relação à barra 1 será 6, isto é, três deslocamentos lineares nas direções dos eixos coordenados, representados pelas variáveis  $x, y$  e  $z$ , e três rotações em torno de cada eixo local, representadas por  $\theta, \phi$  e  $\psi$ .

A análise que se segue será feita restringindo-se a possibilidade de alguns destes seis possíveis movimentos da barra 2 e considerando-se que a barra 1 associada ao sistema de referência esteja fixa:

- a. Restringindo-se o movimento de translação em  $x, y$  e  $z$  e de rotação



**Figura 3.1** Possibilidades de movimento relativo da barra 1 em relação à barra 2.

em  $u$  e  $v$ , tem-se apenas possibilidade de rotação em torno de  $w$ . O movimento é, então, de rotação  $\theta$ , e o par chama-se rotativo, simbolizado por  $R$ .

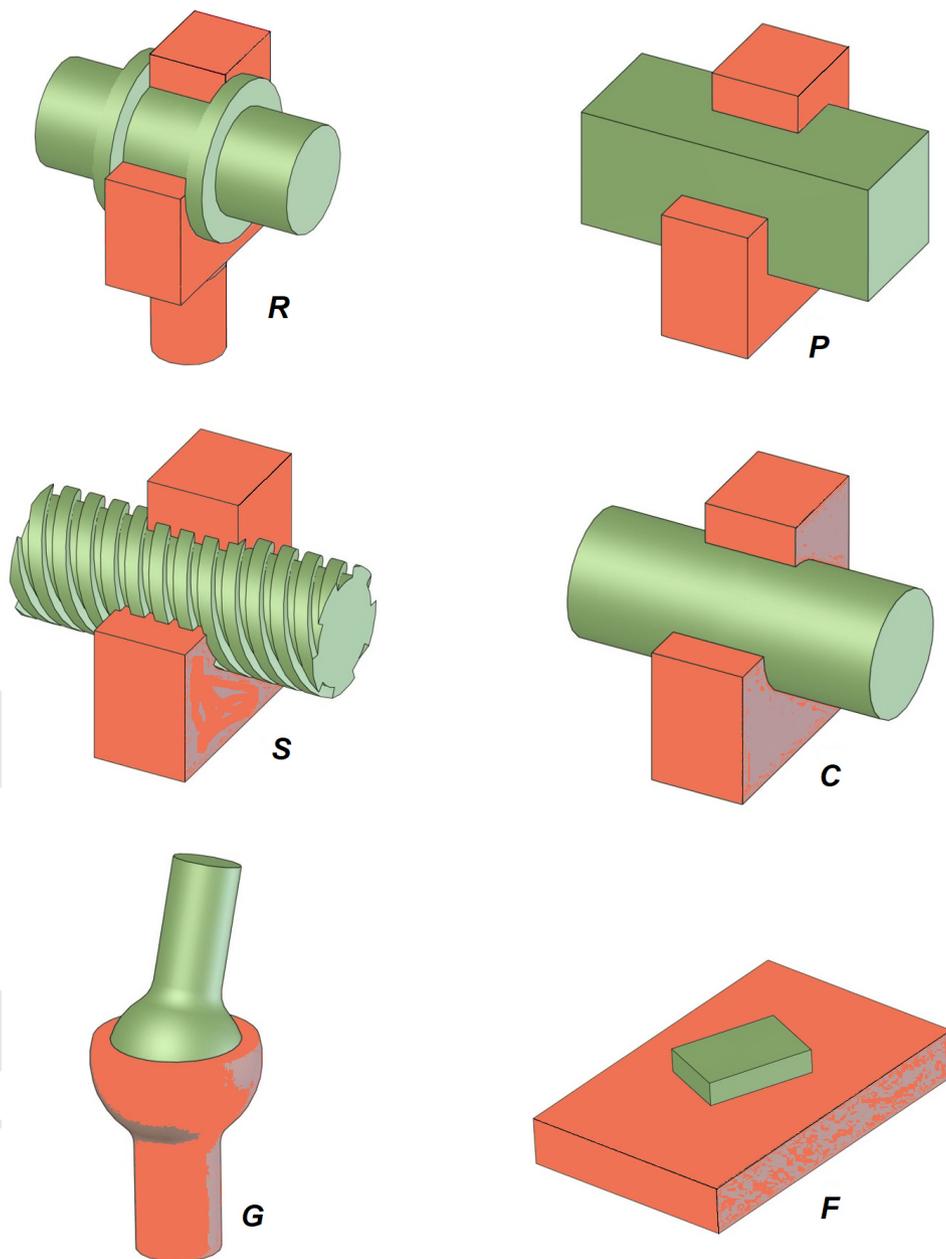
- b. Restringindo-se todas as três rotações em relação a  $u$ ,  $v$  e  $w$  e os deslocamentos segundo  $x$  e  $y$ , fica-se com a possibilidade apenas de translação paralela a  $z$ . O par é chamado prismático e será simbolizado pela letra  $P$ .
- c. Supondo que a barra 2 gire sobre uma hélice em volta do eixo  $w$ , ela também irá se deslocar seguindo uma direção paralela a  $z$ . Este par é dito helicoidal e será representado por  $S_p$ , onde o índice  $p$  representa o passo da hélice. Note que aqui o deslocamento está associado à rotação, e vice-versa.
- d. Quando se permite apenas rotação em torno de  $w$  e translação em relação a  $z$ , tem-se o chamado par cilíndrico, representado por  $C$ .
- e. Sendo permitido apenas rotação em torno de qualquer dos três eixos  $u$ ,  $v$  e  $w$ , o par é dito esférico e será representado pela letra  $G$  da palavra “globular”.
- f. Finalmente, quando são permitidas apenas duas translações  $x$  e  $y$  e uma rotação em torno de um eixo paralelo a  $z$ , tem-se o par plano, denotado por  $F$ .

Tipo de Movimento	Tipo de Par	Símbolo Utilizado	Graus de Liberdade	Variáveis para Descrição
<b>Linear</b>	Rotativo	<b>R</b>	1	$\theta$
	Prismático	<b>P</b>	1	$x$
	Helicoidal	<b>S</b>	1	$x$ ou $\theta$
<b>Superficial</b>	Cilíndrico	<b>C</b>	2	$x, \theta$
	Esférico	<b>G</b>	3	$\theta, \phi, \psi$
	Plano	<b>F</b>	3	$x, y, \theta$

**Tabela 3.2** Pares inferiores, simbologia.

Reuleaux considera os pares rotativo e prismático como casos especiais do par helicoidal com passo zero e infinito, respectivamente. Desta forma, é possível se representar o par rotativo por  $S_0$  e o par prismático por  $S_\infty$ .

Para todos os pares inferiores, com exceção do par plano, as ligações se verificam através de invólucros, porque em cada caso um elemento envolve o outro. A figura 3.2 ilustra estes seis diferentes tipos.

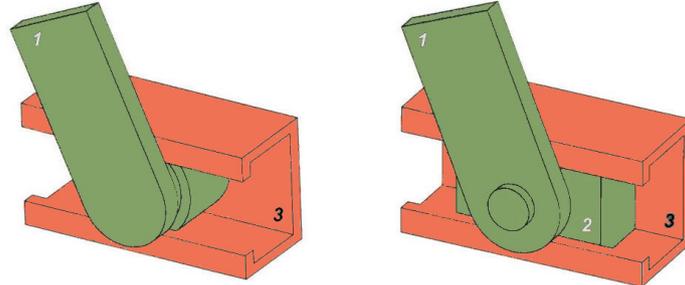


**Figura 3.2** Os seis tipos básicos de pares cinemáticos inferiores.

### Pares Superiores

Os pares superiores não seguem uma classificação rígida como no caso dos inferiores. Assim, cada problema deve ser tratado como um caso em separado. A título de exemplos de pares superiores a contato pontual, tem-se os mancais de esfera, as engrenagens helicoidais de eixos reversos e as juntas homocinéticas. Já o contato linear é encontrado em cames com seguidor de rolo, mancais cilíndricos e nas engrenagens em geral.

Na maioria dos casos, o movimento relativo entre os elementos é bastante complexo, porém ocasionalmente é possível substituir as ligações formadas por pares superiores, por outras contendo apenas pares inferiores, como é o caso ilustrado na figura 3.3.



**Figura 3.3** Substituição de um par superior por um equivalente inferior.

### 3.2. Barras e Elementos Cinemáticos

Como já mencionado, o termo “barra” é aqui empregado para designar qualquer corpo material que possa transmitir movimento entre as várias partes de um mecanismo. A barra deverá conter elementos cinemáticos que representem um local de contato ou conexão a uma outra barra.

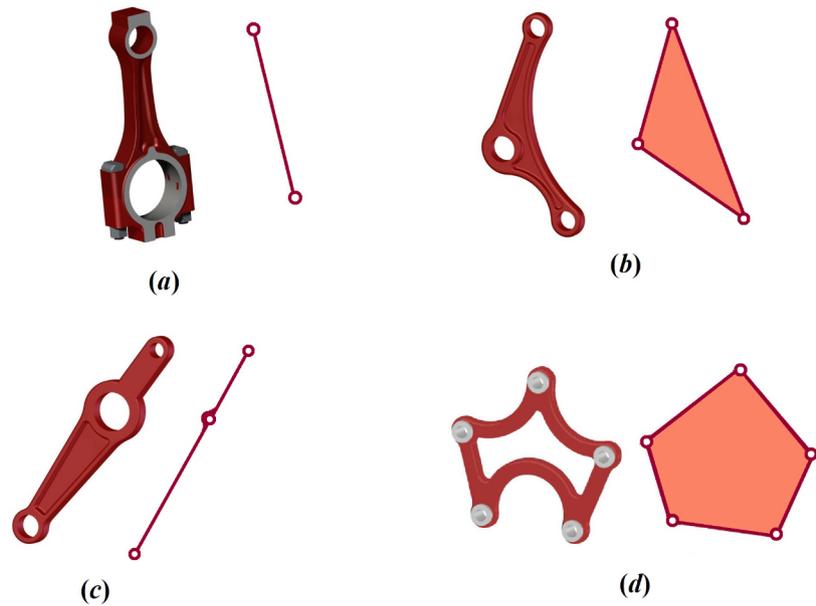
As barras, em função do número de elementos cinemáticos, podem se classificar em:

- *barra binária* – possui dois elementos ( $n_2$ );
- *barra ternária* – possui três elementos ( $n_3$ );
- *barra quaternária* – possui quatro elementos ( $n_4$ ).

e assim por diante.

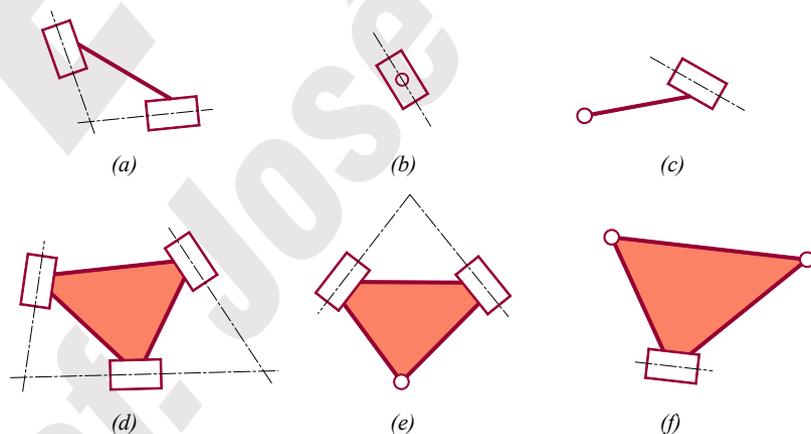
#### Representação Convencional e Representação Esquemática

A figura 3.4 mostra as possíveis representações na forma convencional e na forma esquematizada de barras binárias, ternárias e de maior ordem. A representação esquemática simplifica o desenho da barra através de esboços rápidos efetivados por segmentos para o núcleo da barra e pequenos círculos nas extremidades ou cantos para representar os elementos cinemáticos. A convenção para o esquema de barras com mais de dois elementos cinemáticos não colineares consiste em hachurar o polígono que tem como vértices os elementos cinemáticos, como no caso das barras b e d.



**Figura 3.4** Representação esquemática das barras – em (a) barra binária, em (b) e (c) barra ternária e em (d) barra com 5 elementos.

A figura 3.5 mostra mais alguns exemplos de representação esquemática de barras binárias e ternárias, agora contendo elementos cinemáticos do tipo rotativo e também prismáticos.



**Figura 3.5** Exemplos esquemáticos de barras contendo elementos cinemáticos de tipos diferentes.

Muito embora se tenha uma representação esquemática para os elementos cinemáticos do tipo helicoidal, cilíndrico, esférico e facial, esta não se apresenta de forma rígida, e então deixaremos a encargo do aluno desenvolver suas próprias formas à medida em que se fizer necessário.

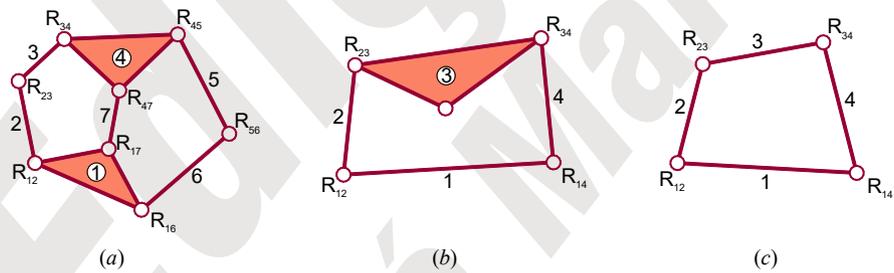
**Saiba mais**

Nas cadeias planas, que serão o objeto principal dos nossos estudos, os pares cinemáticos presentes serão exclusivamente do tipo Rotativo e Prismático.

### 3.3. Cadeia Cinemática

Define-se cadeia cinemática como sendo uma coleção de barras ligadas entre si através de seus elementos cinemáticos. Lembrando que o conceito de barra se traduz em corpo rígido e se torna fácil ver que, apesar de termos cadeias cinemáticas constituídas de outros elementos que não barras, tais como engrenagens, cames e outros, não as teremos quando houver no conjunto mecanismos não rígidos, último item da classificação de Reuleaux, tais como correias e correntes.

A cadeia é dita fechada quando todos os elementos cinemáticos estão ligados entre si, não sobrando nenhum, em nenhuma barra da cadeia, sem conexão, caso contrário, ela será aberta, figura 3.6. A cadeia cinemática será dita simples quando formada apenas por barras binárias, independentemente de ser aberta ou não.



**Figura 3.6** (a) cadeia cinemática fechada, (b) cadeia aberta e (c) cadeia cinemática fechada simples.

#### Critério de Grübler para Cadeias Planas

Utilizando-se o sistema de coordenadas generalizadas  $(x, y, z)$  para a descrição de uma cadeia cinemática fechada, onde todos os pares cinemáticos são do tipo rotativo e, no plano, contendo uma barra fixa como base, é possível se mostrar que o número de graus de liberdade do sistema poderá ser determinado em função apenas do número de barras  $n$  e do número de pares cinemáticos  $j$  da cadeia.

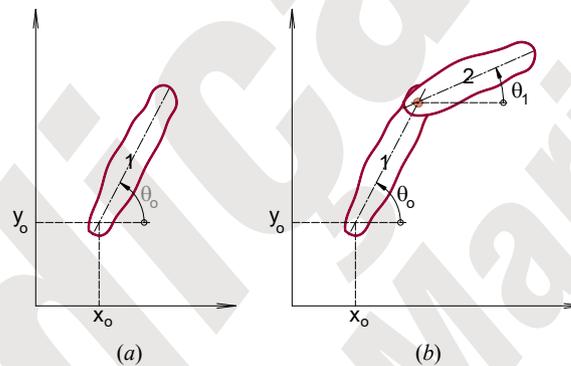
De fato, se tivéssemos apenas uma barra no plano, a sua posição poderia ser determinada por três variáveis  $(x_o, y_o, \theta_o)$ , sendo, portanto, igual a 3 o número de graus de liberdade, figura 3.7a. Adicionando-se uma outra barra por meio de um par cinemático do tipo rotativo, o sistema resultante passará a ter 4 graus de liberdade, figura 3.7b, isto é, foi adicionado apenas mais um grau de liberdade, e não 3 como se poderia inicialmente imaginar. O aluno pode comprovar tal fato aplicando os conceitos de grau de liberdade e coordenadas generalizadas vistos no Capítulo 2, partindo-se de um sistema plano com duas barras livres e determinando o número de equações de restrição após a junção destas pelo par cinemático rotativo. Conclui-se, então, que o par cinemático rotativo reduz dois graus de liberdade da segunda barra. Assim, para  $n$  barras livres no plano:

$$f = 3n \quad (3.1)$$

Se estas “ $n$ ” barras formarem “ $j$ ” pares cinemáticos, cada par cinemático vai reduzir dois graus de liberdade e, então:

$$f = 3n - 2j \quad (3.2)$$

Perceba que a quantidade de elementos cinemáticos em cada barra pode ser qualquer, ou seja, não estamos trabalhando somente com barras binárias, e sim com barras de qualquer ordem. Sempre que se juntam duas barras por um par cinemático rotativo, dois graus de liberdade são retirados do sistema.



**Figura 3.7** Barra livre no plano (a) e conectada a uma segunda barra em (b).

Agora, fixando-se uma das barras ao sistema de referência, haverá redução de mais três graus de liberdade e chega-se ao chamado Critério de Grübler para os mecanismos planos:

$$f = 3(n - 1) - 2j \quad (3.3)$$

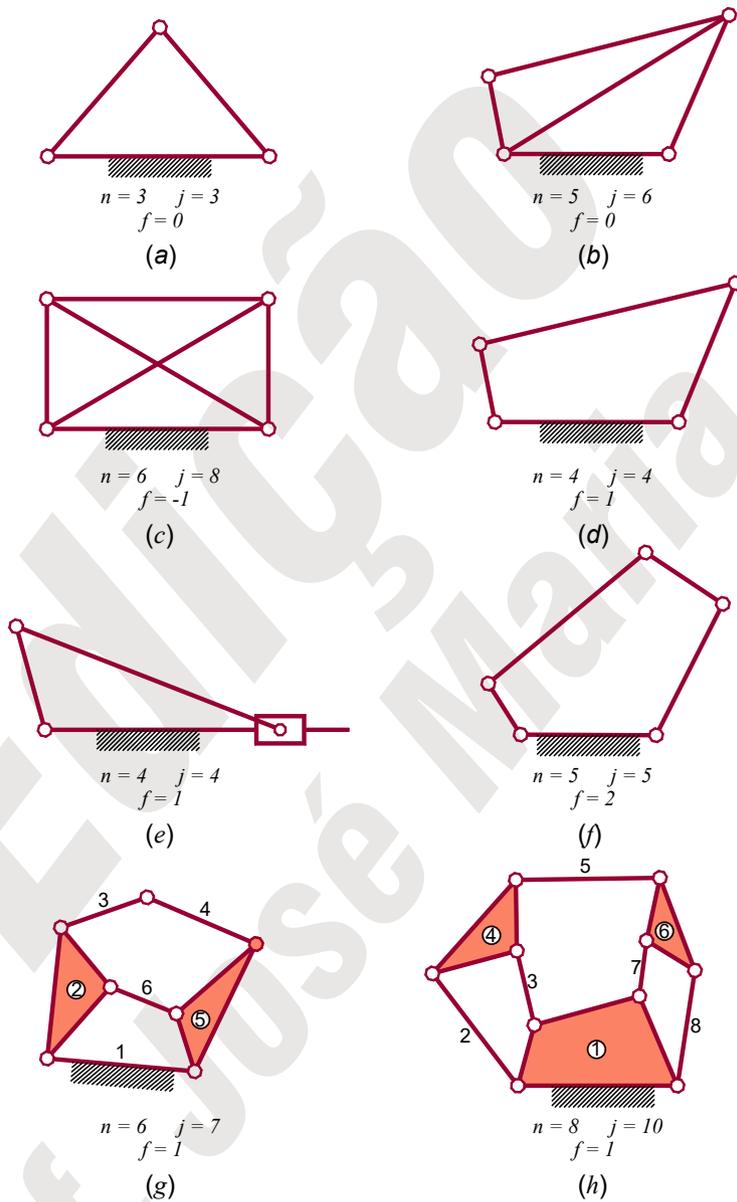
onde:

$f$  = número de graus de liberdade da cadeia

$n$  = número total de barras na cadeia

$j$  = número de pares cinemáticos do tipo rotativo

Observe que esta dedução se baseia nos mecanismos planos contendo apenas pares cinemáticos do tipo rotativo. Apesar disso, será visto mais adiante que, levando-se em consideração certos critérios, a equação (3.3) também poderá ser aplicada às cadeias contendo pares prismáticos e até mesmo pares helicoidais em algumas situações.



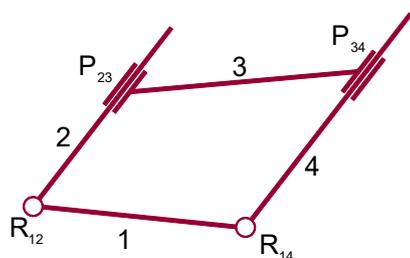
**Figura 3.8** Estruturas em (a), (b) e (c), em (d) e (e) mecanismos impostos de 4 barras, cadeia não imposta em (f) e mecanismos complexos em (g) e (h).

**Fique ligado**

O Critério pode ser aplicado para outros tipos de pares cinemáticos, desde que estes tenham um só grau de liberdade, como é o caso dos pares prismático e helicoidal.

É possível também se estender o critério para cadeias planas contendo pares cinemáticos superiores. Notando-se que estes têm dois graus de liberdade, após considerações similares às feitas acima, chega-se a:

$$f = 3(n - 1) - 2j - h \tag{3.4}$$



**Figura 3.9** À barra 3 é permitido movimento sem que haja movimento das outras barras da cadeia.

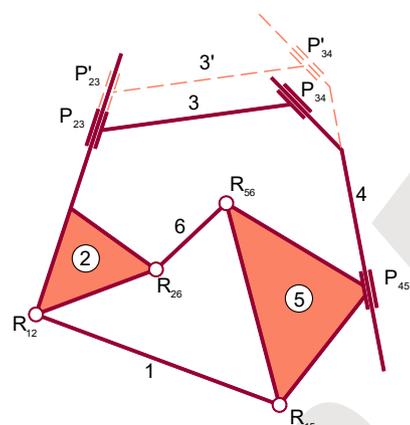
**Fique ligado**

Perceba que as estruturas não são objeto de estudo nos cursos de mecanismos.

**Cadeias Contendo Pares Prismáticos**

Os pares cinemáticos do tipo prismático, semelhantemente às juntas rotativas, possuem um só grau de liberdade, tendo por isto, em alguns casos, características semelhantes a estas. Isto permite que se adaptem ao Critério de Grübler, desde que sejam feitas três restrições indispensáveis:

- Nenhuma barra da cadeia deve conter somente pares prismáticos cujas direções de movimento sejam paralelas entre si, como no caso da figura 3.9.
- Barras binárias possuindo somente pares prismáticos, figura 3.10, não devem ser diretamente ligadas entre si.
- Nenhum polígono fechado de barras da cadeia, figura 3.11, deve ter menos que dois pares cinemáticos do tipo rotativo.



**Figura 3.10** As barras 3 e 4 podem mover-se para uma segunda posição sem que haja movimento das outras barras.

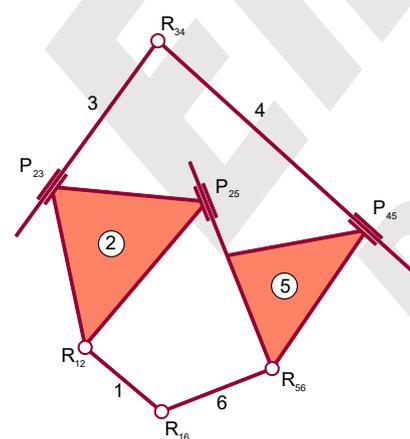
Quando “ $f = 1$ ” numa cadeia cinemática fechada com uma barra fixa, é possível um movimento vinculado de tal forma que a configuração, em determinado instante, de uma barra qualquer da cadeia possa prever toda a configuração do sistema naquele instante. Neste caso, diz-se que a cadeia tem movimento imposto. Este caso é de suma importância e de grande interesse na síntese de mecanismos.

O critério de Grübler com “ $f = 1$ ” permite, então, escrever:

$$n = \frac{2j + 4}{3} \tag{3.5}$$

e

$$j = \frac{3}{2}n - 2 \tag{3.6}$$



**Figura 3.11** Notar a impossibilidade de rotação do par rotativo R34, imposta pelo par prismático P25.

Onde, como já sabemos,  $n$  é o número total de barras na cadeia e “ $j$ ” é o número total de pares cinemáticos rotativos e prismáticos, desde que estes últimos satisfaçam os três critérios anteriormente descritos.

Observando-se que “ $j$ ” deve ser sempre um número inteiro, pois não se

$n$	$j$
2	1
4	4
6	7
8	10
10	13
...	...
$k$	$3k/2-2$

**Tabela 3.3** Cadeias impostas possíveis.

pode ter fração de par cinemático, a equação (3.6) obriga que “ $n$ ” seja par. A tabela 3.3 fornece as primeiras cadeias impostas possíveis.

Agora, considerando que haja  $n_2$  barras binárias,  $n_3$  barras ternárias,  $n_4$  barras quaternárias e assim por diante até que se chegue a  $n_k$  barras com “ $k$ ” elementos cinemáticos na cadeia, onde “ $k$ ” representa o número de elementos cinemáticos da barra de maior ordem, o número total de barras “ $n$ ” da cadeia será dado por:

$$n = n_2 + n_3 + n_4 + \dots + n_k \tag{3.7}$$

Sendo assim, é fácil verificar que o número total de elementos cinemáticos na cadeia será dado por  $2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots + kn_k$ . Agora, notando que cada par cinemático é formado por dois elementos cinemáticos, percebe-se que o número total de pares cinemáticos na cadeia deverá ser:

$$j = \frac{1}{2}(2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots + kn_k) \tag{3.8}$$

Considerações geométricas na imposição da cadeia permitem que se obtenha o número de elementos cinemáticos da barra de maior ordem em função do número total de barras. Denotando este número pela letra “ $k$ ”, tem-se então:

$$k = \frac{n}{2} \tag{3.9}$$

### 3.4. Análise Geral de Cadeias Impostas

No estudo acima nos foi mostrado, equação (3.6), que só existem cadeias impostas quando a quantidade total de barras for par. Desta forma, escolhendo uma determinada quantidade “ $n$ ” de barras ( $n$  par), podemos analisar as diversas possibilidades de montagens de cadeias impostas possíveis neste caso. Vamos então começar levando em consideração que a barra de maior ordem terá “ $k$ ” elementos cinemáticos, com “ $k$ ” satisfazendo a equação (3.9), teremos então, “ $k - 1$ ” barras para que possamos efetuar permutações, obtendo todas as possibilidade.

#### Fique ligado

Perceba que barras de ordem 1 (unárias) não entram neste compo, por deixarem a cadeia aberta, daí termos “ $k - 1$ ” e não “ $k$ ” barras na quantidade de elementos para formarem as cadeias.

Note entretanto que, neste caso, as permutações terão elementos repetidos e, neste caso a expressão matemática que nos permite calcular este tipo de permutação é mostrada na equação (3.10).

$$P_{m+p-1}^p = \frac{(m+p-1)!}{p!(m-1)!} \tag{3.10}$$

Onde a equação (3.10) nos fornece a quantidade de permutações, com elementos repetidos, para “ $m$ ” elementos tomados em um agrupamento “ $p$ ” de elementos. Em nosso caso a quantidade de elementos será “ $m = k - 1$ ” e o agru-

pamento será igual à quantidade de barras, portanto “ $p = n$ ” e a expressão acima torna-se:

$$P_{k+n-2}^n = \frac{(k+n-2)!}{n!(k-2)!} \quad (3.11)$$

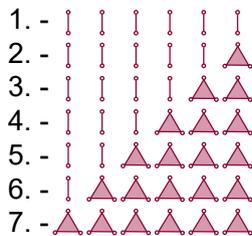
E, substituindo o valor de “ $k$ ”, obtido na equação (3.9), ficamos com:

$$P_{\frac{3n}{2}-2}^n = \frac{(\frac{3n}{2}-2)!}{n!(\frac{n}{2}-2)!} \quad (3.12)$$

A tabela (3.4) mostra a quantidade de permutações possíveis para os diversos valores de “ $n$ ” no estudo de cadeias cinemáticas impostas. Pela tabela, vemos que para “ $n = 6$ ”, teríamos sete combinações como mostrado na figura 3.12 ao lado, porém nós iremos verificar que apenas uma se faz possível na prática e isto se deve ao fato de que, quando das montagens; a primeira, contendo apenas barras binárias, não será imposta e as demais, com exceção apenas da número 3, serão cadeias abertas, não podendo, portanto, serem impostas. Esta análise fica mais distante ainda, na medida em que aumentamos o valor de “ $n$ ”, por exemplo para “ $n = 12$ ”, a tabela nos indica 1.820, ao passo que, na prática real, a quantidade de permutações possíveis seriam 15, ficando claro que, com as restantes 1805 não iríamos conseguir formar cadeias impostas por um motivo ou outro.

$n$	Permutações
4	1
6	7
8	45
10	286
12	1.820
...	...
$k = n/2$	$\frac{(3k-2)!}{n!(k-2)!}$

**Tabela 3.4** Permutações possíveis às diversas cadeias impostas.



**Figura 3.12** Supostas permutações para cadeias impostas de seis barras.

A pergunta que se faz agora é como contornar isto, uma vez que não dá para ficar testando uma enorme quantidade de casos para se tirar deles um percentual ínfimo que realmente importa, e a resposta vem da equação (3.17) que iremos desenvolver logo abaixo, nesta equação, iremos eliminar os valores negativos que possam advir para as variáveis  $n_2$  e  $n_3$  e isto já é o bastante para eliminar todas as possíveis combinações indevidas.

Seja, então, “ $n$ ” a quantidade total de barras na cadeia e  $n_i$  a quantidade de barras de ordem “ $i$ ” nesta cadeia, então, as expressões (3.7) e (3.8) nos permite escrever:

$$\begin{cases} n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + \dots + n_k = n \\ 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \dots + kn_k = 2j \end{cases} \quad (3.13)$$

E, substituindo-se os valores de  $n_k$ , equação (3.9) e “ $j$ ”, equação (3.6), na equação (3.10), acima, vamos obter:

$$\begin{cases} n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + \dots + n_{\frac{n}{2}} = n \\ 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \dots + \frac{n}{2}n_{\frac{n}{2}} = 3n - 4 \end{cases} \quad (3.14)$$

E, tomando-se  $n_2$  e  $n_3$  para pivôs (variáveis não livres), considerações da álgebra linear para a resolução de sistemas lineares, nos levam à seguinte solução:

$$n_2 = 4 + \sum_{i=4}^{i=\frac{n}{2}} (i-3)n_i \quad (3.15)$$

e

$$n_3 = n - 4 - \sum_{i=4}^{i=\frac{n}{2}} (i-2)n_i \quad (3.16)$$

Sendo estas duas últimas equações, (3.15) e (3.16), de suma importância na determinação das possíveis cadeias para “ $n$ ” barras, vamos desenvolvê-las abaixo.

$$\begin{cases} n_2 = 4 + n_4 + 2n_5 + 3n_6 + 5n_7 + \dots + (k - 3)n_k \\ n_3 = (n - 4) - 2n_4 - 3n_5 - 4n_6 - 5n_7 - \dots - (k - 2)n_k \end{cases} \quad (3.17)$$

Então, dada uma quantidade “ $n$ ” de barras para serem estudadas as possibilidades de formação de cadeias impostas, a equação (3.17) nos permite obter todas as possibilidades a partir da ideia de arbitramos valores, sempre inteiros positivos, para as variáveis livres ( $n_4$  em diante) e, para cada conjunto de valores atribuídos às variáveis livres, nós teremos uma solução única para  $n_2$  e  $n_3$ , cada solução nos fornecendo portanto as quantidade de barras binárias, ternárias, quaternárias e assim por diante. À estas soluções vamos dar o nome de **permutação** e, dentro de cada permutação, poderemos efetuar diferentes composições de montagem com estas barras, que vem a ser exatamente a conexão das diversas barras através de seus pares cinemáticos fechando a cadeia, portanto dentro das permutações teremos as **montagens**, ainda dentro da montagem teremos as **inversões** que se caracterizam pela possibilidade de podermos fixar qualquer barra da cadeia para caracterizar efetivamente o mecanismo.

É importante notar também, a equação (3.17) deixa isto bem claro, que  $n_2$  não é constante para um determinado “ $n$ ”, bem como não haverá nenhuma permutação em que a quantidade de barras binárias seja menor que quatro, na verdade, para as diversas possibilidades (valores diferentes de “ $n$ ”), haverá apenas uma única permutação em que  $n_2$  é igual a 4 (tomando-se nulas todas as variáveis livres), nas demais este número será maior que 4. Nesta permutação ( $n_2 = 4$ ), independente do valor de “ $n$ ” não haverá barras de ordem superior a 3, ou seja esta permutação será composta apenas por barras binárias e ternárias, tendo 4 barras binárias e “ $n - 4$ ” barras ternárias.

Também, para um determinado valor “ $n$ ”, iremos ter uma outra permutação especial, que terá duas barras de maior ordem ( $n_k = 2$ ), com  $k = n/2$ , e as restantes todas binárias, em um total de “ $n - 2$ ”, é claro. Esta permutação vai receber o nome especial de “permutação Watt/Stephenson”. Note também que a quantidade máxima de barras de ordem “ $k$ ”, em uma montagem não pode ser maior que duas unidades, a segunda linha da equação (3.17) mostra isto, pois para  $n_k = 3, 4, 5, \dots$ , vai se ter sempre  $n_3$  menor que zero, qualquer que seja o valor de “ $n$ ”, tendo-se, então que descartar estas soluções.

Para finalizarmos estas variações especiais, que têm apenas uma barra de ordem diferente de dois e as demais binárias, temos a permutação em que  $n_4 = 0,5n - 2$ , com as demais variáveis livres nulas e tendo como consequência  $n_2 = 0,5n + 2$  e, neste caso o valor de  $n_3$  será nulo. É claro que esta permutação só vai existir para “ $n > 8$ ”, pois com “ $n$ ” igual a 8 ela existe, mas é especificamente a permutação Watt/Stephenson.

### 3.5. Estudo de Casos

#### Cadeia com Seis barras

Como primeiro exemplo, vamos verificar as possíveis combinações na formação de cadeias cinemáticas e mecanismos quando o número total de barras for igual a seis.

As equações (3.6) e (3.9), para este caso, nos fornecem:

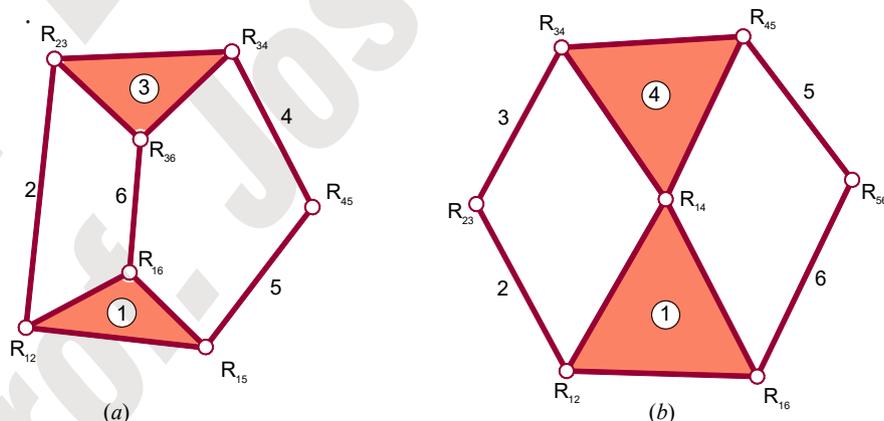
$$j = 7 \quad \text{e} \quad k = 3 \quad (3.18)$$

Portanto a barra de maior ordem, dentro de uma permutação, não pode ser maior que a ternária. Assim na equação (3.17) teremos de  $n_4$ , inclusive, em diante todos nulos, de tal forma que esta equação vai assumir a forma:

$$\begin{cases} n_2 = 4 \\ n_3 = 2 \end{cases} \quad (3.19)$$

Ou seja, só é possível se ter movimento imposto através de uma cadeia com seis barras se esta cadeia contiver quatro barras binárias e duas barras ternárias. Como só foi possível se encontrar uma configuração envolvendo 4 barras binárias e 2 barras ternárias, vemos que só há possibilidade de uma permutação para o sistema.

Examinando as alternativas da equação (3.19), é possível se montar a cadeia de duas formas diferentes, figura 3.13a e 3.13b, permitindo, portanto, duas permutações. A montagem é entendida como sendo as diferentes formas de se conectar as barras dentro de uma permutação.

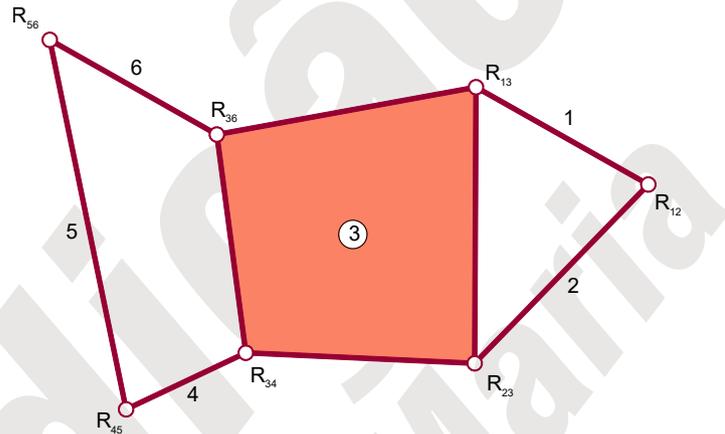


**Figura 3.13** Variações possíveis em (a) cadeia de Stephenson e em (b) cadeia de Watt.

Aqui, sem uma análise mais acurada, poderíamos imaginar a possibilidade de de uma segunda permutação, figura 3.14, porém esta é falsa, pois resultaria em uma cadeia de apenas 4 barras, uma vez que as duas barras binárias (de números 1 e 2) em conjunto com a barra quaternária formam uma estrutura localizada, ou seja, estas três barras ficam se a possibilidade de movimentos relativos entre si.

Estas permutações, em que há possibilidade de formação de estrutura

para um conjunto de barras da cadeia, não serão apresentadas sempre que se use a equação (3.17) na obtenção das cadeias possíveis, portanto não precisaremos nos preocupar, mas teremos que ter o cuidado para que isto não aconteça - formação de estruturas localizadas - quando da composição das diversas barras dentro de uma permutação.



**Figura 3.14** montagem que se degenera em uma cadeia de quatro barras.

A partir de uma montagem, é possível se conseguir os vários mecanismos (cadeia fechada com uma barra fixa) através das inversões. Cada fixação de uma barra diferente produz uma inversão da cadeia e conseqüentemente um mecanismo de características diferentes.

Perceba que as posições relativas entre as barras quando em movimento não se alteram em cada inversão.

Neste exemplo, são possíveis apenas duas inversões distintas para a cadeia de Watt e duas para a de Stephenson. As demais são idênticas a uma destas duas.

### Cadeias com Doze barras

Pelo uso das expressões acima, podemos facilmente analisar as possibilidades para uma cadeia de 12 barras, teremos que fornecer valores às variáveis livres  $n_4$ ,  $n_5$  e  $n_6$ , que representam a quantidade de barras de ordem quatro, ordem 5 e ordem 6 respectivamente na cadeia e para cada conjunto de valores secundários arbitrados vamos obter também os valores para as variáveis pivôs (não livres)  $n_2$  e  $n_3$ , a partir das equações mostradas abaixo.

$$\begin{cases} n_2 = 4 + n_4 + 2n_5 + 3n_6 \\ n_3 = 8 - 2n_4 - 3n_5 - 4n_6 \end{cases} \quad (3.20)$$

Cada conjunto determinado a partir de valores numéricos designados às variáveis livres vai nos permitir obter um conjunto de barras de ordens variadas ao qual chamaremos de permutação. Para este caso o número total, e possível, encontrado foi de quinze variações ao todo, como mostrado na tabela 2.5, abaixo.

VARIACÃO	Variáveis					Barras na Variação											
	Não Livres		Livres														
	n2	n3	n4	n5	n6												
Variacão 01	4	8															
Variacão 02	7	4			1												
Variacão 03	10				2												
Variacão 04	6	5		1													
Variacão 05	9	1		1	1												
Variacão 06	8	2		2													
Variacão 07	5	6	1														
Variacão 08	8	2	1		1												
Variacão 09	7	3	1	1													
Variacão 10	9	0	1	2													
Variacão 11	6	4	2	0													
Variacão 12	9		2	0	1												
Variacão 13	8	1	2	1													
Variacão 14	7	2	3														
Variacão 15	8		4														

Tabela 2.5 Todas as variações para uma cadeia imposta contendo 12 barras.

Vamos analisar algumas variações, desta tabela, começando pela permutação de número 03 que se caracteriza na Watt/Stephenson. Dentro desta permutação, já sabemos que são possíveis apenas duas permutações que são a montagem Watt e a montagem Stephenson, figura 3.15.

**Fique ligado**

Lembre-se que as permutações são as diferentes formas de montagem das barras dentro de uma determinada permutação.

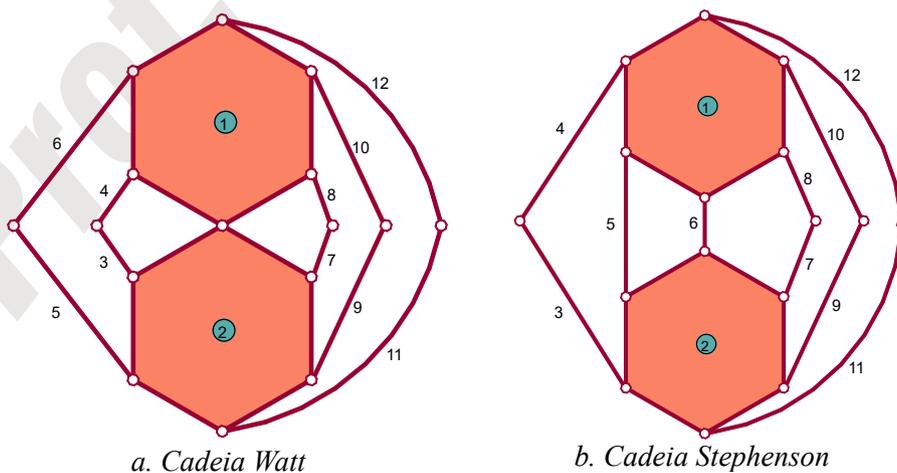
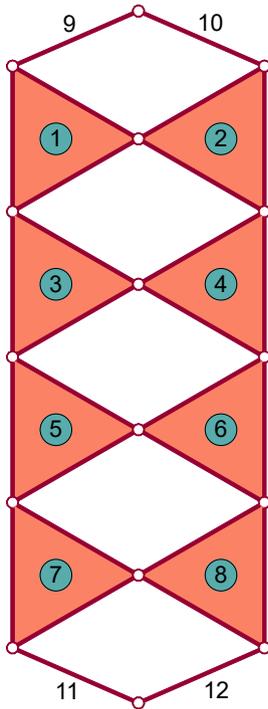


Figura 3.15 permutação Watt/Stephenson para Cadeias com doze barras.



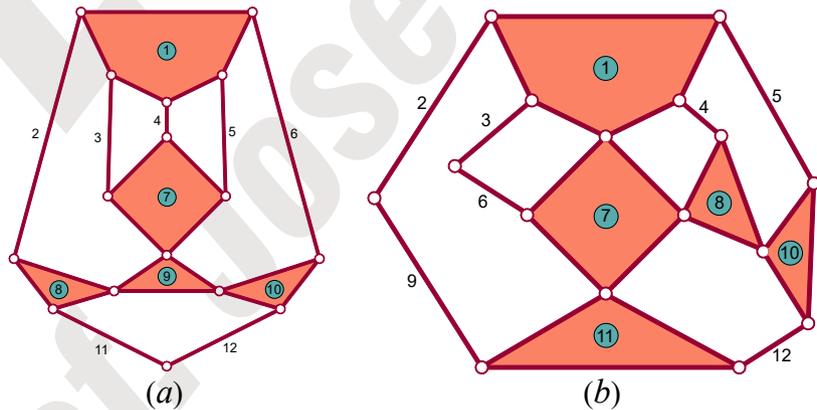
**Figura 3.16** Variação somente com barras ternárias e binárias no estudo de cadeias com 12 barras.

Com relação às inversões, podemos distinguir seis em cada montagem, no caso da Watt, seriam as fixações - uma por vez, é claro - das barras 6, 4, 1, 8, 10 e 12. Perceba, por exemplo, que a fixação da barras de número 5 ou 3 não foram mencionadas pelo fato de serem correspondentes às fixações das barras 6 e 4 respectivamente, isto, neste caso específico se dá pelo fato de a cadeia ser simétrica em relação à horizontal. No caso da cadeia Stephenson, as diferentes inversões se dariam pela fixação das barras 4, 1, 8, 10 e 12, estas preservando simetria com as barras inferiores correspondentes e mais as barras 5 e 6 que não têm simetria.

Uma outra permutação notável seria a de número 01, composta somente por barras binárias e ternárias e, é sabido que nesta viração somente três permutações são possíveis, vamos aqui mostrar apenas a primeira na figura 3.16 ao lado.

Para as inversões, devido à simetria, teríamos as possíveis fixações da barras de número 9, 1, 3, 5, 7 e 11.

Finalmente, estudemos uma permutação ordinária, mais especificamente a de número 09, que contém sete barras binárias, três ternárias, uma quaternária e uma de ordem cinco. A figura 3.17 mostra duas possíveis permutações, sendo a primeira simétrica, mas atente que neste caso ainda podemos encontrar várias outras.



**Figura 3.17** permutação genérica no estudo de cadeias com doze barras.

Com relação às inversões, pelo fato de a montagem (a) ser simétrica, poderemos fixar, de formas diferenciada, as barras de números 2, 3, 8 e 11 dentro da simetria e mais as barras 1, 4, 7 e 9, completando um total de oito inversões possíveis. Na segunda montagem, figura 3.16b, não temos nenhuma simetria na geometria do mecanismo, levando-nos à compreensão que a quantidade de inversões possíveis é exatamente igual ao número de barras da cadeia, ou seja, doze inversões possíveis.

### 3.6. Implementação em Julia

Como já mencionado, as implementações computacionais serão através

de scripts em Julia, e estes podem ser rodados localmente ou direto na net através do Kernel “IJulia” presentes nos sites Juliabox, “[juliabox.com](http://juliabox.com)” ou Jupyter, “[jupyter.org](http://jupyter.org)”.

Sendo assim neste capítulo, segue então, abaixo, o código que constrói as diversas permutações para cadeias impostas com “ $n$ ” barras e, facilitando o trabalho do aluno que deseje utilizar ou testar este código, o mesmo está disponível, para download, a partir do endereço “[github.com/mecanismos-UFPE](https://github.com/mecanismos-UFPE)”, na pasta “Codigos-Julia”.

Inicialmente, temos, em nosso código, a função *Compute\_Var\_Livres*( $n$ ), que computa as equações (3.15) e (3.16) nas variáveis  $n_2$  e  $n_3$ .

```

1 | function Compute_Var_Livres(n)
2 |     global k; global n2; global n3 # Global para retorno
3 |     n2, n3 = 4, 2*k - 4           # inicialização, variáveis não-livres
4 |     for i in 1:k-3
5 |         n2 += i*n[i]             # Computa o somatório das variáveis
6 |         n3 -= (i+1)*n[i]        # não-livres
7 |     end
8 |     n3 < 0 ? false : true        # Retorna falso para n3 negativo
9 | end

```

E, em seguida, temos a função *Show\_Combines*( $N$ ) que efetivamente obtém as permutações e que é a única função pública a ser utilizada.

```

1 | function Show_Combines(N)
2 |     Verify(N) ? p=1 : return    # Inicia Contador das permutações
3 |
4 |     global k; global n2; global n3
5 |
6 |     k = N >> 1                 # k = n/2 da teoria
7 |     orig = collect(0:k-2)      # Vetor [n4,n5,...,nk]
8 |     aux = [1 for i in 1:k-2]   # Auxilia troca dos elementos
9 |     aux[end] = 0               # e encerra o while
10 |    v_livre = [0 for i in 1:k-3] # Variáveis livres em cada set
11 |
12 |    print(" PERMUTAÇÃO |n2-n3|n4") # Formatação, cabeçalho da tabela
13 |    println(join(["-n$(i)" for i in 5:k], "|") # <-- formatação
14 |    println(join(["---" for i in 1:k+4]))      # <-- formatação
15 |
16 |    while aux[end] == 0
17 |        for i in [1:k]
18 |            for j in 1:k-3 # preenche o vetor das
19 |                v_livre[k-2-j] = orig[aux[j]] # variáveis livres
20 |            end
21 |            if Compute_Var_Livres(v_livre)
22 |                println("Permutação ", p, " - ", append!([n2,n3],v_livre))
23 |                p += 1
24 |            end
25 |            aux[1] += 1
26 |        end
27 |        for i in 1:k-3 # efetua as permutações
28 |            if aux[i] == k # no vetor aux.
29 |                aux[i] = 1
30 |                aux[i+1] += 1
31 |            end
32 |        end
33 |    end
34 | end

```

Por ser bastante simples, o algoritmo acima dispensa explicações, sobretudo pelo fato de os comentários já deixarem claro o desenvolvimento do código. Note-se entretanto, que apesar de o algoritmo gerar a permutação, ela só é impressa se a função `Compute_Var_Livres(n)` devolver um valor, `booleano`, verdadeiro e isto só acontece se o valor da variável  $n_3$ , por ela obtido, for positivo ou nulo e isto está bem caracterizado com o condicional (`if`) na linha 21.

A função `Verify(N)`, assim como a função `Compute_Var_Livres(n)`, é uma função privada, que prevê algum tipo de erro, por parte do usuário, na chamada da função `Show_Combines(N)`. Além da prevenção de erros, ela também simplifica os cálculos no caso das cadeias de 4 e seis barras, já mostrando um valor imediato para estes, uma vez que são bastante simples.

```

1 | function Verify(N)           # verifica se N é ímpar, nulo ou negativo
2 |     if N % 2 != 0 || N < 4
3 |         println("n tem que ser par e maior ou igual a 4")
4 |         return false
5 |     elseif N == 4
6 |         println("Permutação Única - ",[4, 0])
7 |         return false
8 |     elseif N == 6
9 |         println("Permutação Única - ",[4, 2])
10 |        return false
11 |    end
12 |    true
13 | end

```

### Forma de Uso

A utilização dos scripts acima é feita de forma bem simples com apenas uma única linha que se traduz na chamada à função `Show_Combines(N)`. Colocando, como argumento, (N), a quantidade de barras a serem estudadas.

Por exemplo, o código abaixo permite que se estude as diversas permutações em cadeias com dez barras, neste caso  $N = 10$ .

```

1 | Show_Combines(10)

```

Esta chamada vai ter, como retorno, uma tabela com as diversas permutações em cada linha.

### 3.7. Exercícios

1. A equação (3.4) estende o critério de Grübler para cadeias planas contendo pares superiores acrescentando o termo “h”. Dê exemplos deste tipo de par em cadeias e verifique se é possível se ter mais de um tipo.

2. Dê exemplos (desenhe) de cadeias contendo pares cinemáticos dos tipos helicoidal, cilíndrico, esférico e plano.

3. Faça desenhos utilizando a representação convencional dos vários tipos de mecanismos ou cadeias cinemáticas existentes em sua oficina mecânica.

4. Tente encontrar uma fórmula extensiva do Critério de Grübler para cadeias espaciais contendo somente pares inferiores.

5. Demonstre que, para cadeias impostas, o número “k” de elementos cinemáticos da barra de maior ordem não pode ser superior a  $n/2$ , ou seja, a barra de maior ordem, presente em algumas variações, terá:

$$k = \frac{n}{2}$$

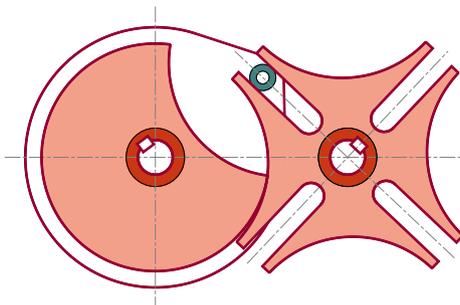
elementos cinemáticos.

6. Numa cadeia imposta, conhecendo-se o número de elementos “i” da barra de maior ordem, demonstre que o número de barras binárias é dado por:

$$n_2 = 4 + \sum_{i=4}^{\frac{n}{2}} (i - 3)n_i$$

7. Analise as possíveis combinações (permutações e inversões) para cadeias de oito barras.

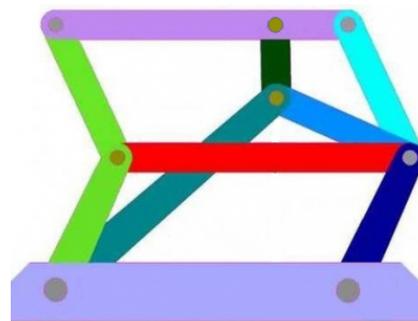
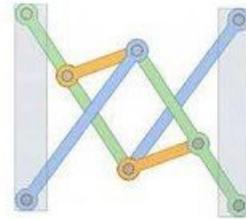
8. Como pode ser classificado o par cinemático formado pelo mecanismo de Geneva mostrado na figura abaixo?



**Figura 3.18-8** Cadeia com giro intermitente conhecida como “mecanismo de Geneva”.

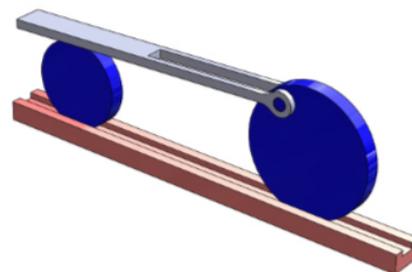
9. Acesse o site "Mechanical Movements" (<http://507-movements.com/toc.html>), e aplicando Grübler às cadeias de número 166 e 168, considerando, na 168, que a barra verde (não totalmente mostrada) é binária e tem a sua outra extremidade formando par rotativo com a barra fixa, determine a quantidade de graus de liberdade de cada uma.

10. Utilizando o critério de Grübler, determine o número de graus de liberdade para as cadeias que se seguem, sabendo que estas têm uma barra fixa.



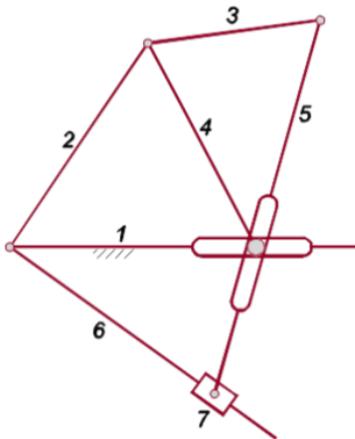
**Figura 3.19-10** Cadeia com giro intermitente conhecida como “mecanismo de Geneva”.

11. Na figura a barra inferior (cor de abóbora) é fixa e as rodas azuis trabalham sem deslizamento, verifique quantos graus de liberdade tem este novo par, identifique se o movimento é plano ou espacial e, em função de uma adaptação no critério de Grübler, determine a quantidade de graus de liberdade do sistema.



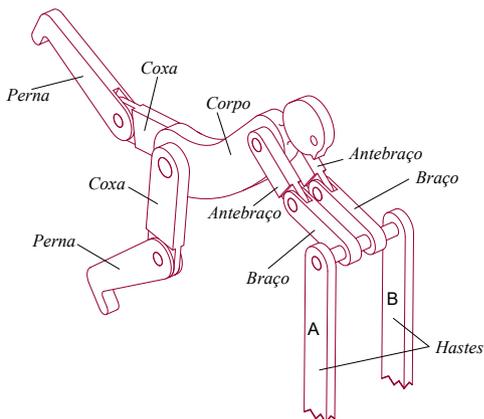
**Figura 3.20-11** Cadeia com giro intermitente conhecida como “mecanismo de Geneva”.

12. Aplicando Grüber estendido, equação (3.4) na cadeia mostrada, determine o número de graus de liberdade.



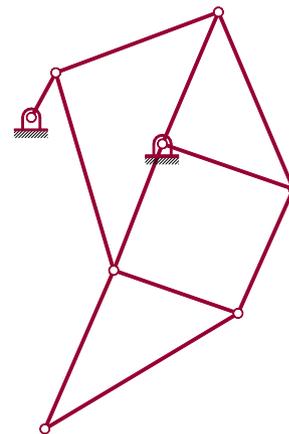
**Figura 3.21-12** Cadeia com giro intermitente conhecida como “mecanismo de Geneva”.

13. Para o boneco articulado da figura, determine o tipo de cadeia e a quantidade de graus de liberdade, considerando as barras A e B fixas e braços sempre paralelos.



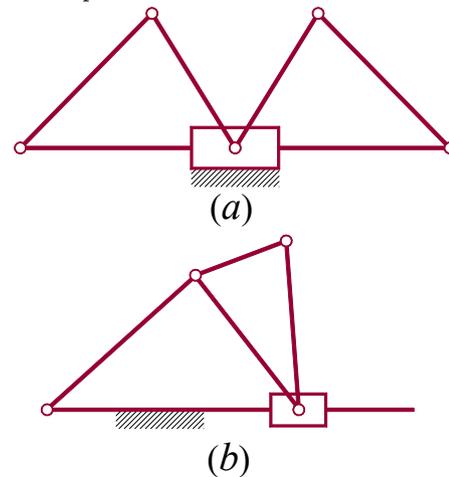
**Figura 3.22-13** Cadeia com giro intermitente conhecida como “mecanismo de Geneva”.

14. Verifique quantas barras tem o mecanismo de Theo Jansen mostrado na figura e aplique Grüber para o mesmo. Verifique, se for o caso, em que permutação ele se enquadra e quantas montagens ter-se-ia dentro desta permutação.



**Figura 3.23-14** Cadeia com giro intermitente conhecida como “mecanismo de Geneva”.

15. Classifique as cadeias abaixo, verifique quantas barras possuem, determinando o tipo (binária, ternária, etc.) e encontre o número de graus de liberdade de cada uma aplicando o critério de Grüber.



**Figura 3.24-15** Cadeias cinemáticas com diversos tipos de pares cinemáticos.

### Referências Bibliográficas

MARGHITU, D. B. Kinematic chains and machine components design. Elsevier Academic Press, 2005.

NORTON, R. L. Design of machinery: an introduction to the synthesis and analysis of mechanisms and machines. Fourth Edition. McGraw-Hill, 2007.

SHARMA, C. S.; PUROHIT, K. Theory of Mechanisms and Machines. New Delhi: Prentice-Hall, 2006.

SHIGLEY, J. E.; UICKER, J. J. Theory of Machines and Mechanisms. Second Edition. McGraw-Hill, 1995.

SHIGLEY, J. E. Cinemática dos Mecanismos. Ed. Edgard Blücher, 1970.

HAZZAN, SAMUEL; Fundamentos de matemática elementar 5, combinatória, probabilidade, 8. ed. – São Paulo, Atual, 2013.