Capítulo 5

Coeficientes de Velocidade

O conceito de mecanismo, como já visto anteriormente, está intrinsecamente ligado à ideia da modificação de movimentos; a cadeia cinemática recebe o movimento através de uma "barra de entrada" e o transforma para um novo movimento, externando-o por uma "barra de saída". A relação entre este movimento de saída pelo de entrada é de suma importância e vem facilitar a análise e o desenvolvimento das expressões finais, principalmente na obtenção das acelerações em mecanismos de barras. Neste tipo de mecanismo, esta "razão" recebe o nome específico de Coeficiente de Velocidade e, nos demais tipos vai se chamar Relação de Transmissão.

5.1. Posicionamento das Cadeias Cinemáticas

Toda cadeia cinemática, seja ela imposta ou não, terá um sistema de coordenadas generalizadas associado envolvendo coordenadas conhecidas ou predeterminadas, chamadas aqui de coordenadas principais qi e coordenadas desconhecidas inicialmente ou a se determinar, chamadas coordenadas secundárias sj. Em particular, toda barra da cadeia deverá ter a sua coordenada generalizada, seja ela do tipo principal ou secundária, pois assim toda a cadeia poderá ser descrita em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações.

5.2. Coeficientes de Velocidade

No caso das cadeias impostas, apenas uma coordenada principal se fará necessária. Vamos supor conhecidas, para esta coordenada, a posição , a velocidade e a aceleração , em qualquer instante de tempo. Se a cadeia tiver n+2 barras, a quantidade de coordenadas generalizadas necessárias para a sua descrição será n-1, pois teremos n coordenadas secundárias e mais uma coordenada principal, notando que a barra fixa – terá que haver uma, pois trata-se de cadeias impostas – não necessita de coordenadas para o seu posicionamento. A expressão 5.1, a seguir, define este sistema de coordenadas generalizadas, sendo q a coordenada principal e si, i = 1..n, as coordenadas secundárias.

$$(q, s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n) \tag{5.1}$$

Saiba mais

A coordenada generalizada para a qual se conhecem os componentes de deslocamento, velocidade e aceleração é chamada principal, as demais são secundárias.

O coeficiente de velocidade, que será denotado aqui pela letra k, é específico para cada barra da cadeia e, consequentemente, para cada coordenada generalizada é definido pelo quociente da velocidade desta barra dividido pela velocidade da barra principal , barra esta sempre associada à coordenada generalizada principal, veja a equação (5.2).

$$k_i = \frac{\dot{s}_i}{\dot{q}} \tag{5.2}$$

Também, como tantos autores, aqui estaremos utilizando a clássica notação de ponto sobre a variável para denotar derivada em relação ao tempo.

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} \quad \text{e} \quad \dot{s}_i = \frac{ds_i}{dt} \tag{5.3}$$

Note que esta definição, dada em (5.2), pode ser matematicamente desenvolvida da seguinte forma:

$$\frac{\dot{s}_i}{\dot{q}} = \frac{\frac{ds_i}{dt}}{\frac{dq}{dt}} = \frac{ds_i}{dt}\frac{dt}{dq} = \frac{ds_i}{dq} \tag{5.4}$$

E chegamos à expressão definitiva para o coeficiente de velocidade, na forma:

$$k_i = \frac{ds_i}{dq} \tag{5.5}$$

que é bastante prática e conveniente, vez que normalmente não dispomos da velocidade si para utilizarmos a expressão (5.2) na obtenção do coeficiente de velocidade.

Fique ligado

O coeficiente de velocidade para uma dada coordenada também pode ser obtido pela diferenciação desta em relação à Coordenada principal (ks = ds/dq).

Obtenção da Velocidade a Partir do Coeficiente de Velocidade

É imediato que, se tivermos o coeficiente de velocidade para uma barra qualquer, poderemos obter a velocidade desta barra a partir da equação (5.2) da seguinte forma:

$$\dot{s}_i = \dot{q} k_i \tag{5.6}$$

E será esta a forma mais conveniente de se obter a velocidade, e a preferencialmente utilizada em nossos estudos.

Obtenção da Aceleração a Partir do Coeficiente de Velocidade

Diferenciando-se diretamente a equação 5-6 em relação ao tempo, obtém-se:

$$\ddot{s}_i = \ddot{q} k_i + \dot{q} \frac{dk_i}{dt} \tag{5.7}$$

Porém, o termo pode ser desenvolvido matematicamente da seguinte maneira:

$$\frac{dk_i}{dq} \frac{dq}{dt} = \dot{q} \frac{dk_i}{dq} \tag{5.8}$$

À expressão damos o nome de "Coeficiente da Aceleração", e vamos representá-la pela letra l, sendo assim:

$$\ell_i = \frac{dk_i}{dq} \tag{5.9}$$

E, desta forma, a equação (5.7) pode ser reescrita:

$$\ddot{s} = \ddot{q} k_i + \dot{q}^2 \ell_i \tag{5.10}$$

Fique ligado

Apesar de receber o nome de coeficiente da aceleração, a expressão dk/dq é diferente da razão , como poderíamos inicialmente pensar.

Perceba que k é função de todas as variáveis no sistema de coordenadas generalizadas utilizado e, portanto, nós podemos utilizar a regra da cadeia para funções de várias variáveis na obtenção do coeficiente da aceleração, como mostrado na expressão (5.11).

$$\ell_i = \frac{dk_i}{dq} = \frac{\partial k_i}{\partial q} + \frac{\partial k_i}{\partial s_1} \frac{ds_1}{dq} + \frac{\partial k_i}{\partial s_2} \frac{ds_2}{dq} + \cdots + \frac{\partial k_i}{\partial s_n} \frac{ds_n}{dq} \tag{5.11}$$

Ou:

$$\ell_i = \frac{\partial k_i}{\partial q} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial k_i}{\partial s_j} k_j \tag{5.12}$$

que facilita sobremaneira o cálculo de ℓi.

Como exemplo elucidativo da obtenção dos coeficientes de velocidade e aceleração, vamos supor uma cadeia cinemática em que o sistema de coordenadas generalizadas seja (θ, α, β) e que, para esta, tenhamos as seguintes equações de restrição:

$$\begin{cases} a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\alpha + c\cos\beta - c = 0 \\ a\,\mathrm{sen}\,\theta + b\cos\alpha - c\,\mathrm{sen}\,\beta \qquad = 0 \end{cases}$$

Derivando este sistema na variável θ, e lembrando que α e β são funções de θ, vem:

$$\begin{cases} -a\,\mathrm{sen}\,\theta + b\frac{d\alpha}{d\theta}\cos\alpha - c\frac{d\beta}{d\theta}\,\mathrm{sen}\,\beta = 0 \\ \quad a\cos\theta - b\frac{d\alpha}{d\theta}\,\mathrm{sen}\,\alpha - c\frac{d\beta}{d\theta}\cos\beta = 0 \end{cases}$$

Substituindo os valores de $d\alpha/d\theta$ por k_α e $d\beta/d\theta$ por k_β e rearranjando o sistema, teremos:

$$\begin{cases} bk_\alpha\cos\alpha - ck_\beta\,\mathrm{sen}\,\beta = a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ bk_\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha + ck_\beta\cos\beta = a\cos\theta \end{cases}$$

Agora temos um sistema linear nas incógnitas kα e kβ perfeitamente solúvel e cuja solução é mostrada a seguir:

$$\begin{cases} k_\alpha = \frac{a\,\mathrm{sen}\,(\beta+\theta)}{b\cos(\alpha-\beta)} \\ k_\beta = \frac{a\cos(\alpha+\theta)}{c\cos(\alpha-\beta)} \end{cases}$$

Para o cálculo dos coeficientes da aceleração, vamos utilizar a equação (5.11), obtendo primeiramente ℓ_α:

$$\ell_\alpha = \frac{\partial k_\alpha}{\partial\theta} + \frac{\partial k_\alpha}{\partial\alpha}k_\alpha + \frac{\partial k_\alpha}{\partial\beta}k_\beta$$

Cada termo acima pode ser obtido de forma fácil

$$\frac{\partial k_\alpha}{\partial\theta} = \frac{a\cos(\beta+\theta)}{b\cos(\alpha-\beta)}$$
$$\frac{\partial k_\alpha}{\partial\alpha} = \frac{a\,\mathrm{sen}\,(\alpha-\beta)\,\mathrm{sen}(\beta+\theta)}{b\cos^2(\alpha-\beta)}$$
$$\frac{\partial k_\alpha}{\partial\beta} = \frac{a\cos(\alpha+\theta)}{b\cos^2(\alpha-\beta)}$$

Utilizndo a equação (5.11), vamos obter também o coeficiente da acelaração ℓ_β:

$$\ell_\beta = \frac{\partial k_\beta}{\partial\theta} + \frac{\partial k_\beta}{\partial\alpha}k_\alpha + \frac{\partial k_\beta}{\partial\beta}k_\beta$$

e, então os valores são

$$\frac{\partial k_\beta}{\partial\theta} = -\frac{a\,\mathrm{sen}(\alpha+\theta)}{c\cos(\alpha-\beta)}$$
$$\frac{\partial k_\beta}{\partial\alpha} = -\frac{a\,\mathrm{sen}\,(\beta+\theta)}{c\cos^2(\alpha-\beta)}$$
$$\frac{\partial k_\beta}{\partial\beta} = -\frac{a\,\mathrm{sen}\,(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\theta)}{c\cos^2(\alpha-\beta)}$$

5.3. Extensão às Cadeias não Impostas

Para cadeias não impostas (dois ou mais graus de liberdade), se fará necessária uma coordenada generalizada principal para cada grau de liberdade, pois só assim o posicionamento da cadeia poderá ser descrito. Suporemos, então, conhecidos, para cada uma destas coordenadas, as posições , $r = 1..m$, as velocidades e as acelerações , em qualquer instante de tempo. Se a cadeia tiver "$n + m + 1$" barras, a quantidade de coordenadas generalizadas necessárias para a sua descrição será "$n - m$", sendo n a quantidade de coordenadas secundárias e m a quantidade de coordenadas principais, notando-se mais uma vez que a barra fixa não necessita de coordenadas para o seu posicionamento. A expressão (5.13) define este sistema de coordenadas generalizadas, sendo q_r, $r = 1..m$, as coordenadas principais e s_i, $i = 1..n$, as coordenadas secundárias.

(5.13)

Agora vamos ter um coeficiente de velocidade associado a cada coordenada principal; o qual será denotado aqui pela letra k_{ir}, onde o primeiro índice "i" denota a barra secundária e o segundo índice "r" denota a barra principal. Teremos, então, "m" coeficientes de velocidade para cada barra secundária na cadeia e, não esquecendo de notar também que cada variável secundária s_i depende de todas as variáveis principais q_r, $r = 1..m$, e somente delas, pelo conceito de número de graus de liberdade, ou seja, $s_i = f_i(q_1, q_2, \dots, q_m)$, pode-se definir o "coeficiente de velocidade" pela expressão:

(5.14)

Novamente, nós devemos perceber a facilidade do cálculo de k_{ir} a partir da equação montada para cada s_i, pois a derivada é parcial.

Fique ligado

No caso de cadeias não impostas, irão existir "m" coeficientes de velocidade para cada barra secundária na cadeia.

Velocidade em Cadeias não Impostas

Mais uma vez notando que a variável si depende das variáveis principais qr, r = 1..m, ou seja, si = fi(q1,q2,...,qm), a derivada de si em relação ao tempo pode ser obtida aplicando-se a regra da cadeia para funções de várias variáveis:

(5.15)

E, percebendo que e , ficamos com a expressão final para a velocidade de cada barra secundária em cadeias não impostas dada pela equação (5.16) abaixo.

(5.16)

Apesar de parecer complexa, esta expressão é bastante fácil de ser calculada, como veremos no Capítulo 7, com a obtenção simplificada de todos os k_i's pelo método matricial.

Aceleração em Cadeias não Impostas

Diferenciando-se diretamente a equação (5.16) em relação ao tempo, obtém-se:

(5.17)

Porém, o termo pode ser desenvolvido matematicamente da seguinte maneira:

(5.18)

onde m representa a quantidade de coordenadas principais e n a quantidade de coordenadas secundárias, veja Capítulo 7. Teremos novamente o nosso "Coeficiente da Aceleração" dado por:

(5.19)

E, então, a equação (5.17) se transforma em:

(5.20)

5.4 Dimensão do Coeficiente de Velocidade

Desde que estaremos lidando com cadeias planas, os pares cinemáticos envolvidos serão somente do tipo rotativo e prismático, como consequência, poderemos ter movimentos angulares e lineares para as barras. Desta forma, é possível se ter uma razão entre velocidades que não seja adimensional como, por exemplo, uma velocidade angular dividida por uma velocidade linear, ou vice-versa. E então, quando isto acontecer (dimensão existente para o coeficiente de velocidade), devemos informar esta dimensão ao fornecer os valores de ki, como, por exemplo, "cm" quando a variável secundária é linear e a principal é angular ou "1/cm" em caso contrário.

Já o coeficiente da aceleração sempre terá dimensão "1/seg" (ou o inverso de outra unidade de tempo qualquer), mas pode ter esta dimensão acrescida da unidade linear em cm/seg quando a variável secundária for linear e a principal for angular, ou "1/cm.seg" no caso inverso.

5.5. Exercícios

1. Deduza a expressão para a aceleração, em cadeias impostas, a partir da equação (5.6) reescrita abaixo.

$$\dot{s}_i = \dot{q} k_i$$

2. Uma cadeia cinemática tem (θ, φ, x) para o seu sistema de coordenadas generalizadas e, com este sistema, as seguintes equações de restrição:

$$\begin{cases} a\cos\theta + x\cos\varphi - b = 0 \\ a\,\mathrm{sen}\,\theta - x\,\mathrm{sen}\,\beta \qquad = 0 \end{cases}$$

Determine os coeficientes de velocidade k_φ e k_x e também os coeficientes da aceleração ℓ_φ e ℓ_x.

3. Uma cadeia cinemática com dois graus de liberdade tem (θ_1, θ_2, φ) para o seu sistema de coordenadas generalizadas e permite montar as seguintes equações de restrição:

$$\begin{cases} a\cos\theta_1 + b\cos\theta_2 + c\cos\varphi - d = 0 \\ a\,\mathrm{sen}\,\theta_1 + b\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + c\,\mathrm{sen}\,\varphi - e = 0 \end{cases}$$

Sabendo-se que θ_1 e θ_2 são coordenadas principais, determine o coeficiente de velocidade k_φ e a aceleração ℓ_φ para a coordenada φ.

4.Resolva o problema anterior supondo agora que as duas coordenadas principais são linearmente dependentes com $\theta_2 = 2\theta_1$.

5. Na figura abaixo, x é a coordenada principal e α e y são secundárias. Determine os coeficientes de velocidade e aceleração.

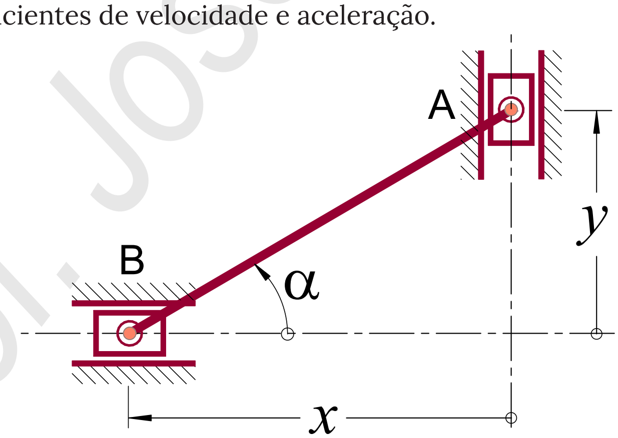

Figura 5.1 Cadeia de quatro barras com coordenadas generalizadas x, α e y.

Referências Bibliográficas

DOUGHT, S. Mechanics of Machine. John Wiley & Sons Inc, 2001.

SHARMA, C. S.; PUROHIT, K. Theory of Mechanisms and Machines. New Delhi: Prentice-Hall, 2006.

SHIGLEY, J. E.; UICKER, J. J. Theory of Machines and Mechanisms. McGraw-Hill, Second Edition 1995.