

CAPÍTULO 6

Análise de Cadeias Impostas

Este capítulo tem como objetivo fornecer ferramentas para que, através da análise de cadeias impostas com qualquer número de barras, se possam obter as expressões matemáticas exatas para a análise dos deslocamentos, velocidades e acelerações com base na geometria fornecida.

Diferentemente da forma tradicional, onde se utilizam os métodos vetoriais requerendo uma análise detalhada de cada barra da cadeia e tornando difícil e complexa a sua aplicação, a abordagem aqui utilizada vai se ater aos princípios de Lagrange, no que diz respeito à cinemática de corpos rígidos, neste contexto, os conceitos de coordenadas generalizadas e graus de liberdade serão aqui considerados de suma importância, muito embora não seja exigido do aluno um conhecimento profundo, vez que estes serão desenvolvidos desde o início e passo a passo levando em consideração todos os critérios necessários, tanto do ponto de vista geométrico como também matemático.

O aluno haverá de notar que este método se assenta firmemente em conceitos matriciais de forma a se ter uma análise facilitada por uma abstração de detalhes das barras e buscando uma abordagem conceitual, tendo como base a cadeia global e não as suas barras individuais. Portanto, para um perfeito entendimento o aluno necessita de um conhecimento muito bem embasado de álgebra linear e a respeito disto, alguns tópicos desta matéria são lembrados no apêndice B.

Para que tenhamos uma ideia inicial do método, vamos primeiramente aplicá-lo, de forma prática a uma cadeia imposta de quatro barras por ser esta a cadeia mais simples possível. E para facilitar mais ainda a nossa análise, vamos escolher o mecanismo biela manivela cujas equações de deslocamento, velocidades e acelerações são de fácil obtenção, posteriormente far-se-á aplicação deste desenvolvimento para cadeias compostas impostas contendo um número qualquer de barras.

6.1. Mecanismo Biela Manivela

Análise de Posição

Vejam os mecanismo biela manivela, esquematizado na figura 6.1a, que aqui vamos considerar um comprimento “a” para a manivela, e um comprimento “b” para a biela, estes dois constantes o tempo todo, e “x” será a distância do pistão ao centro de giro da manivela, temos ainda duas outras variáveis, θ e φ , sendo θ a variável de entrada considerada aqui conhecida (não é uma constante) e para o problema, vamos considerar conhecidos também $\dot{\theta}$, velocidade da barra “a”, e $\ddot{\theta}$, aceleração da barra “a” e com isto fica caracterizada toda a cinemática da barra “a”. De acordo com a composição de vetores mostrada na figura 6.1b, podemos então escrever a seguinte equação vetorial:

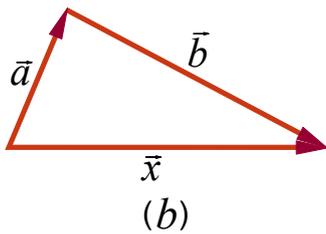
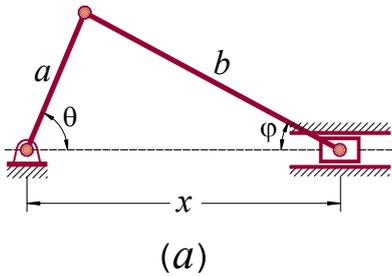


Figura 6.1 Mecanismo Biela Manivela em (a) e composição vetorial em (b).

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{x} = \vec{0} \tag{6.1}$$

Decompondo, nas direções x e y, esta composição de vetores, vamos obter um sistema de equações, não lineares nas incógnitas φ e x, como mostrado abaixo.

$$\begin{cases} a \cos \theta + b \cos \varphi - x = 0 \\ a \sin \theta - b \sin \varphi = 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

A resolução deste sistema, nas variáveis φ e x, vai fornecer, de imediato, a solução para o deslocamento angular φ pela equação (6.3) a seguir.

$$\varphi = \arcsen\left(\frac{a}{b} \sin \theta\right) \tag{6.3}$$

E para o deslocamento linear x, isolando-se os quadrados de $\cos \varphi$ e $\sin \varphi$ em cada linha e somando-se, vamos obter o valor dado na equação (6.4) abaixo.

$$x = a \cos \theta \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \theta} \tag{6.4}$$

O sinal negativo do radical pode ser eliminado notando que para $\theta = \pi/2$ teríamos x negativo, sendo isto impossível para a geometria apresentada, ficamos então com:

$$x = a \cos \theta + \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \theta} \tag{6.5}$$

Como o valor final do deslocamento x.

Análise de Velocidades

Após a aplicação das equações (6.3) e (6.5) podemos considerar conhecidos os deslocamentos e conseqüentemente os valores de φ e x. Cabe também lembrar que as variáveis a, b, e θ são fornecidas de antemão como dados de projeto. Derivando-se o sistema de equações (6.2) na variável principal θ , e considerando, na diferenciação, que φ e x, dependem de θ , obtém-se:

$$\begin{cases} -a \sin \theta - b \frac{d\varphi}{d\theta} \sin \varphi - \frac{dx}{d\theta} = 0 \\ a \cos \theta - b \frac{d\varphi}{d\theta} \cos \varphi = 0 \end{cases} \tag{6.6}$$

Porém, como visto no capítulo anterior, podemos substituir as derivadas

de φ e de x , em θ , pelos respectivos coeficientes de velocidade e ficamos com:

$$\begin{cases} -a \operatorname{sen} \theta - b k_{\varphi} \operatorname{sen} \varphi - k_x = 0 \\ a \cos \theta - b k_{\varphi} \cos \varphi = 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

que é linear nas incógnitas k_{φ} e k_x , e podemos colocá-lo em um arranjo matricial, equação (6.8), de forma a se ter uma melhor compreensão:

$$\begin{bmatrix} b \operatorname{sen} \varphi & 1 \\ b \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{\varphi} \\ k_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -a \operatorname{sen} \theta \\ a \cos \theta \end{Bmatrix} \quad (6.8)$$

Designando por:

$$\underset{\approx}{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} b \operatorname{sen} \varphi & 1 \\ b \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

a matriz principal do sistema, sua inversa será:

$$\underset{\approx}{\mathbf{J}^{-1}} = -\frac{1}{b \cos \varphi} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -b \cos \varphi & b \operatorname{sen} \varphi \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Efetuando o produto da mesma em ambos os lados da equação (6.8), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} k_{\varphi} \\ k_x \end{Bmatrix} = -\frac{a}{b \cos \varphi} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -b \cos \varphi & b \operatorname{sen} \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\operatorname{sen} \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix} \quad (6.11)$$

E finalmente:

$$\begin{Bmatrix} k_{\varphi} \\ k_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{a \cos \theta}{b \cos \varphi} \\ -a \frac{\operatorname{sen}(\varphi + \theta)}{\cos \varphi} \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

E, como visto no capítulo cinco, podemos determinar a velocidade angular da barra “b”, através do produto de k_{φ} pela velocidade angular da barra principal.

$$\dot{\varphi} = \frac{a}{b} \dot{\theta} \frac{\cos \theta}{\cos \varphi} \quad (6.13)$$

E a velocidade linear do pistão, pelo produto de k_x pela velocidade angular da barra principal.

$$\dot{x} = -a \dot{\theta} \frac{\operatorname{sen}(\varphi + \theta)}{\cos \varphi} \quad (6.14)$$

Acelerações

Aqui também, consideraremos conhecidos, além dos parâmetros já mencionados anteriormente, a aceleração angular da barra “a”. Aplicando-se a equação 5-10, teremos:

$$\underset{\sim}{\ddot{\mathbf{S}}} = \underset{\sim}{\ddot{\theta}} \underset{\sim}{\mathbf{K}} + \underset{\sim}{\dot{\theta}^2} \underset{\sim}{\mathbf{L}} \quad (6.15)$$

onde:

$$\underset{\sim}{\mathbf{K}} = \begin{Bmatrix} k_{\varphi} \\ k_x \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

e:

$$\underset{\sim}{\mathbf{L}} = \begin{Bmatrix} l_{\varphi} \\ l_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dk_{\varphi}}{d\theta} \\ \frac{dk_x}{d\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial k_{\varphi}}{\partial \theta} + \frac{\partial k_{\varphi}}{\partial \varphi} k_{\varphi} + \frac{\partial k_{\varphi}}{\partial x} k_x \\ \frac{\partial k_x}{\partial \theta} + \frac{\partial k_x}{\partial \varphi} k_{\varphi} + \frac{\partial k_x}{\partial x} k_x \end{Bmatrix} \quad (6.17)$$

Calculando-se as derivadas parciais na matriz \mathcal{D} , obtém-se:

$$\underset{\sim}{L} = \begin{Bmatrix} -\frac{a}{b} \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \varphi} + \frac{a}{b} \frac{\text{sen } \varphi \text{ cos } \theta}{\text{cos}^2 \varphi} k_{\varphi} + 0k_x \\ -a \frac{\text{cos}(\varphi+\theta)}{\text{cos } \varphi} - a \frac{\text{cos } \theta}{\text{cos}^2 \varphi} k_{\varphi} + 0k_x \end{Bmatrix} \quad (6.18)$$

Cuja substituição e equacionamento dos k 's fornece:

$$\underset{\sim}{L} = \begin{Bmatrix} -k_{\varphi}(\text{tg } \theta + k_{\varphi} \text{tg } \varphi) \\ k_{\varphi} \frac{b}{a} (\text{tg } \theta \text{tg } \varphi - \text{cos } \varphi - k_{\varphi}) \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

E finalmente o valor da aceleração será dado por:

$$\underset{\sim}{\ddot{S}} = \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} = \ddot{\theta} \begin{Bmatrix} k_{\varphi} \\ k_x \end{Bmatrix} + \dot{\theta}^2 \begin{Bmatrix} -k_{\varphi}(\text{tg } \theta - k_{\varphi} \text{tg } \varphi) \\ k_x \text{cotg}(\varphi + \theta) - k_{\varphi}^2 \frac{b}{\text{cos } \varphi} \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

Substituição Numérica

Considerando-se uma velocidade angular constante e unitária para a barra “a”, portanto $\ddot{\theta} = 0$, e uma relação entre “b” e “a” da ordem 2, foi possível se levantar, numericamente, os gráficos de deslocamentos, velocidades e acelerações, figuras 6.2 e 6.3, para a barra “b” e para o pistão, em função do deslocamento angular θ , da barra “a”.

Nos gráficos a seguir, tem-se o deslocamento angular da barra “a”, em radianos, no eixo das abscissas e, na figura 6.2 tem-se o deslocamento velocidade e aceleração para a barra “b” no eixo das ordenadas em *radianos*, *radianos por segundo* e *radianos por segundo ao quadrado*, respectivamente.

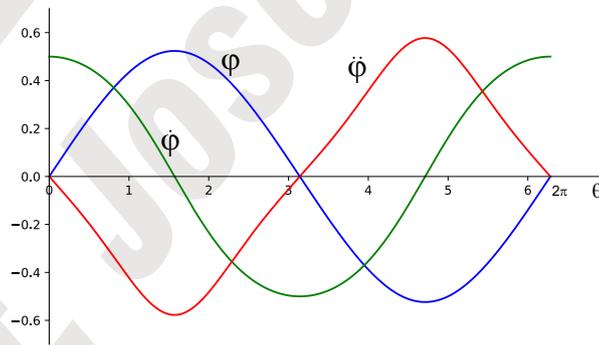


Figura 6.2 Gráficos de deslocamento, velocidade e aceleração para a variável φ .

E na figura 6.3, abaixo, se tem o deslocamento velocidade e aceleração para o pistão (x , \dot{x} e \ddot{x}) no eixo das ordenadas em *milímetros**, *milímetros por segundo* e *milímetros por segundo ao quadrado*, respectivamente.

* Considerando que as dimensões das barras “a” e “b” foram informadas em milímetros.

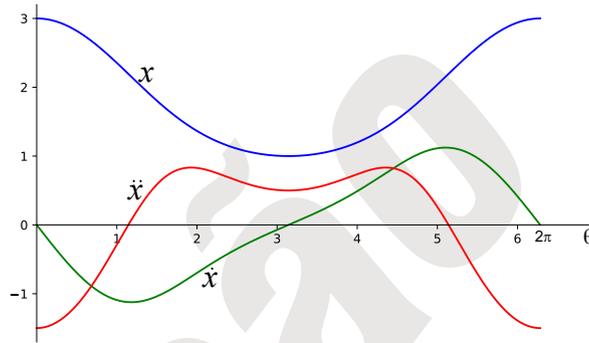


Figura 6.3 Gráficos de deslocamento, velocidade e aceleração para a variável x .

Estes gráficos, figuras 6.2 e 6.3, foram obtidos em Python com a utilização das bibliotecas “Matplotlib” e “PyLab” como iremos ver, mais à frente no item 6.6, ainda neste capítulo.

6.2. Caso geral

Vamos desenvolver agora um método para a obtenção dos deslocamentos, velocidades e acelerações que, apesar de simples, pode ser aplicado a qualquer cadeia cinemática imposta, *mecanismo*, independente do número de barras. Portanto, generalizando, iremos supor um mecanismo com $n + 2$ barras, sendo é claro, uma delas fixa e uma contendo a entrada do movimento, esta denominada *barra motora*, as demais serão as barras secundárias, para as quais iremos determinar os deslocamentos, velocidades e acelerações em função do deslocamento, velocidade e aceleração da barra de entrada.

Passemos então à este desenvolvimento.

Montagem do Sistema

Vamos supor um mecanismo qualquer, tendo movimento imposto, e com $n + 1$ coordenadas generalizadas descrevendo-o através do sistema de coordenadas generalizadas apresentado na equação (6.21).

$$(q, s_1, s_2, s_3, \dots, s_n) \quad (6.21)$$

Onde as coordenadas s_i , $i = 1, \dots, n$ dependem diretamente da coordenada principal q e, dado que a cadeia é imposta, isto permitirá a formação de n equações de restrição, obtendo-se o sistema de equações, não-lineares, mostrado na equação (6.22).

$$\begin{cases} f_1(q, s_1, s_2, s_3, \dots, s_n) = 0 \\ f_2(q, s_1, s_2, s_3, \dots, s_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(q, s_1, s_2, s_3, \dots, s_n) = 0 \end{cases} \quad (6.22)$$

Saiba Mais

A coordenada generalizada para a qual se conhecem os componentes de deslocamento, velocidade e aceleração é chamada principal, as demais são secundárias.

Análise de Deslocamento

As posições de deslocamentos angulares e/ou lineares, aqui representadas pelos s_i , serão conhecidas resolvendo-se o sistema de equações (6.22). Pelo fato de este sistema quase sempre envolver funções transcendentais, nem sempre é possível uma solução analítica, neste caso a solução sempre poderá ser obtida por processos numéricos.

Também não precisa haver uma exigência de que cada variável secundária fique em função apenas da variável principal, esta pode conter outras variáveis secundárias em sua expressão, desde que estas variáveis estejam já definidas em função da principal.

Análise de Velocidades

Diferenciando-se a equação (6.22), Em relação à coordenada principal θ e aplicando a regra da cadeia para funções de múltiplas variáveis, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dq} &= \frac{\partial f_1}{\partial q} + \frac{\partial f_1}{\partial s_1} \frac{ds_1}{dq} + \frac{\partial f_1}{\partial s_2} \frac{ds_2}{dq} + \frac{\partial f_1}{\partial s_3} \frac{ds_3}{dq} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \frac{ds_n}{dq} \\ \frac{df_2}{dq} &= \frac{\partial f_2}{\partial q} + \frac{\partial f_2}{\partial s_1} \frac{ds_1}{dq} + \frac{\partial f_2}{\partial s_2} \frac{ds_2}{dq} + \frac{\partial f_2}{\partial s_3} \frac{ds_3}{dq} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \frac{ds_n}{dq} \\ &\vdots \\ \frac{df_n}{dq} &= \frac{\partial f_n}{\partial q} + \frac{\partial f_n}{\partial s_1} \frac{ds_1}{dq} + \frac{\partial f_n}{\partial s_2} \frac{ds_2}{dq} + \frac{\partial f_n}{\partial s_3} \frac{ds_3}{dq} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \frac{ds_n}{dq} \end{aligned} \tag{6.23}$$

Relembrando a definição de coeficiente de velocidade ($k_i = ds_i/d\theta$), estudada no capítulo anterior, e colocando em forma matricial, vamos ter:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \frac{\partial f_n}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6.24}$$

ou ainda, de forma simplificada:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial s} \right] \{K\} = - \left\{ \frac{\partial f}{\partial q} \right\} \tag{6.25}$$

Neste estágio, se faz importante a utilização da notação matricial para as matrizes coluna $\{K\}$ e $\{\partial f/\partial q\}$ e para o Jacobino $[\partial f/\partial s]$, fazendo:

$$\tilde{J} = \left[\frac{\partial f}{\partial s} \right], \quad \tilde{K} = \{K\} \quad \text{e} \quad \tilde{F} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial q} \right\} \tag{6.26}$$

Poderemos então determinar a matriz dos coeficientes de velocidade \tilde{b} , a partir da inversa do jacobiano:

$$\tilde{K} = -\tilde{J}^{-1}\tilde{F} \tag{6.27}$$

Agora, notando que q , \mathcal{D} e $\bar{\mathcal{D}}$ são conhecidos, pois se trata da coordenada

principal, podemos obter a matriz das velocidades por:

$$\underset{\sim}{\dot{S}} = \underset{\sim}{\dot{q}}\underset{\sim}{K} \quad (6.28)$$

Sendo que:

$$\underset{\sim}{\dot{S}} = \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \vdots \\ \dot{s}_n \end{Bmatrix} \quad (6.29)$$

Acelerações

Como já sabemos a aceleração pode ser obtida em função dos coeficientes de velocidade e aceleração a partir de:

$$\ddot{s}_i = \ddot{q}k_i + \dot{q}^2\ell_i \quad (6.30)$$

Que na forma matricial se transforma em:

$$\underset{\sim}{\ddot{S}} = \ddot{q}\underset{\sim}{K} + \dot{q}^2\underset{\sim}{L} \quad (6.31)$$

E aqui a forma matricial de $\underset{\sim}{D}$ será:

$$\underset{\sim}{L} = \begin{Bmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial q} + \frac{\partial k_1}{\partial s_1}k_1 + \frac{\partial k_1}{\partial s_2}k_2 + \dots + \frac{\partial k_1}{\partial s_n}k_n \\ \vdots \\ \frac{\partial k_n}{\partial q} + \frac{\partial k_n}{\partial s_1}k_1 + \frac{\partial k_n}{\partial s_2}k_2 + \dots + \frac{\partial k_n}{\partial s_n}k_n \end{Bmatrix} \quad (6.32)$$

Que pode ainda ser desenvolvida em:

$$\underset{\sim}{L} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial q} \\ \frac{\partial k_2}{\partial q} \\ \vdots \\ \frac{\partial k_n}{\partial q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial s_1} & \frac{\partial k_1}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial k_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial k_2}{\partial s_1} & \frac{\partial k_2}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial k_2}{\partial s_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial k_n}{\partial s_1} & \frac{\partial k_n}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial k_n}{\partial s_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{Bmatrix} \quad (6.33)$$

ou, de forma simplificada:

$$\underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{K}_q + \underset{\sim}{J}_k\underset{\sim}{K} \quad (6.34)$$

onde:

$$\underset{\sim}{K}_q = \begin{Bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial q} \\ \frac{\partial k_2}{\partial q} \\ \vdots \\ \frac{\partial k_n}{\partial q} \end{Bmatrix} \quad (6.35)$$

e:

$$\underset{\sim}{J}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial s_1} & \frac{\partial k_1}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial k_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial k_2}{\partial s_1} & \frac{\partial k_2}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial k_2}{\partial s_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial k_n}{\partial s_1} & \frac{\partial k_n}{\partial s_2} & \dots & \frac{\partial k_n}{\partial s_n} \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

6.3. Exemplos de Aplicação

Inversão do Mecanismo Biela Manivela

Neste exemplo, vamos determinar os deslocamentos, velocidades e acelerações para o pistão (deslocamento linear) e a barra a ele associada (deslocamento angular) de uma outra inversão do mecanismo Biela Manivela mostrado na figura (6.4).

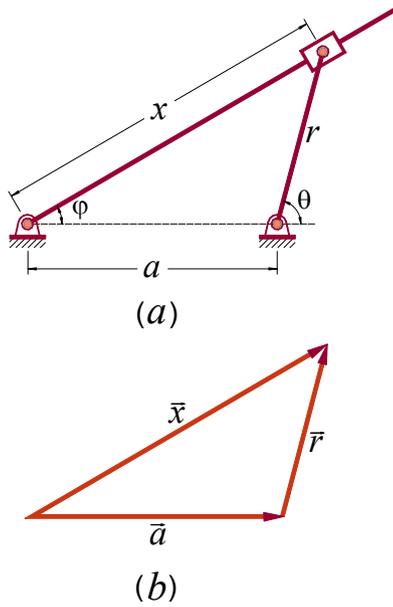


Figura 6.4 Uma outra inversão do mecanismo biela manivela e sua composição vetorial.

Determinação dos Deslocamentos

Seja então a composição de vetores mostrada na figura (6.4b, com a qual podemos escrever a seguinte equação vetorial:

$$\vec{a} + \vec{r} - \vec{x} = \vec{0} \tag{6.37}$$

Decompondo a equação vetorial, segundo os eixos x e y , iremos obter o sistema de equações não lineares nas incógnitas φ e x .

$$\begin{cases} a + r \cos \theta - x \cos \varphi = 0 \\ r \sin \theta - x \sin \varphi = 0 \end{cases} \tag{6.38}$$

O qual nos fornece, após a eliminação de x nas duas equações, a seguinte solução para φ :

$$\varphi = \arctg\left(\frac{r \sin \theta}{a + r \cos \theta}\right) \tag{6.39}$$

E o valor de x pode ser obtido pela soma dos quadrados das linhas do sistema (6.38):

$$x = \sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta} \tag{6.40}$$

Determinação das Velocidades

Após a aplicação das equações (6.39) e (6.40), podemos considerar conhecidos os parâmetros φ e x , e como dados de projeto também temos conhecidos r , a e θ . Derivando-se o sistema de equações (6.38), obtém-se:

$$\underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} x \sin \varphi & -\cos \varphi \\ -x \cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix} \tag{6.41}$$

Para o Jacobiano e:

$$\underset{\sim}{F} = r \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix} \tag{6.42}$$

A inversa do Jacobiano será:

$$\underset{\sim}{J}^{-1} = -\frac{1}{x} \begin{bmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ x \cos \varphi & x \sin \varphi \end{bmatrix} \tag{6.43}$$

Agora, compondo as equações (6.42) e (6.43) segundo a equação (6.27), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \dot{k}_\varphi \\ \dot{k}_x \end{Bmatrix} = \frac{r}{x} \begin{bmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ x \cos \varphi & x \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{Bmatrix} \tag{6.44}$$

Cujo produto e simplificação trigonométrica permite escrever:

$$\begin{Bmatrix} \dot{k}_\varphi \\ \dot{k}_x \end{Bmatrix} = \frac{r}{x} \begin{Bmatrix} \cos(\varphi - \theta) \\ x \sin(\varphi - \theta) \end{Bmatrix} \tag{6.45}$$

E de forma específica:

$$\dot{k}_\varphi = \frac{r}{x} \cos(\varphi - \theta) \tag{6.46}$$

$$\dot{k}_x = r \sin(\varphi - \theta) \tag{6.47}$$

Determinação das Acelerações

Aqui também, consideraremos conhecida, além dos parâmetros já mencionados anteriormente, a aceleração angular da barra “ r ”. Aplicando-se as

equações (6.35) e (6.36), obtém-se:

$$K_q = \begin{Bmatrix} \frac{r}{x} \sin(\varphi - \theta) \\ -r \cos(\varphi - \theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{x} k_x \\ -x k_\varphi \end{Bmatrix} \quad (6.48)$$

e:

$$J_k \approx \begin{bmatrix} -\frac{r}{x} \sin(\varphi - \theta) & -\frac{r}{x^2} \cos(\varphi - \theta) \\ r \cos(\varphi - \theta) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x} k_x & -\frac{1}{x^2} k_\varphi \\ x k_\varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

Agora, aplicando (6.34), teremos:

$$\begin{cases} \ell_\varphi = \frac{k_x}{x} (1 - 2k_\varphi) \\ \ell_x = x k_\varphi (k_\varphi - 1) \end{cases} \quad (6.50)$$

com os quais, obteremos a equação final da aceleração na seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} = \ddot{\theta} \begin{Bmatrix} k_\varphi \\ k_x \end{Bmatrix} + \dot{\theta}^2 \begin{Bmatrix} \frac{k_x}{x} (1 - 2k_\varphi) \\ x k_\varphi (k_\varphi - 1) \end{Bmatrix} \quad (6.51)$$

Substituição Numérica

Na aplicação das equações, foi considerada uma velocidade angular constante para a barra r e uma relação entre a e r da ordem 3, com isto se foi possível levantar, numericamente, os gráficos de deslocamentos, velocidades e acelerações, figuras 6.5 e 6.6, para as variáveis φ e x , em função do deslocamento angular θ .

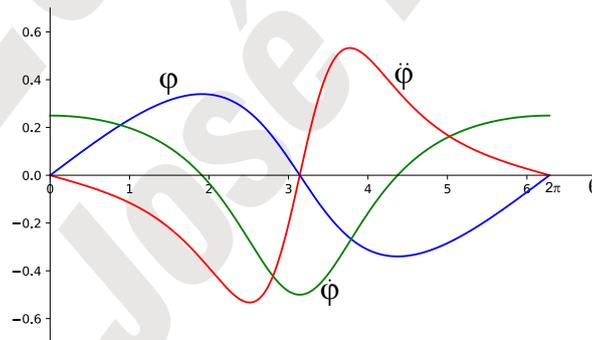


Figura 6.5 Gráficos de deslocamento, velocidade e aceleração para a variável φ , na inversão do mecanismo Biela Manivela.

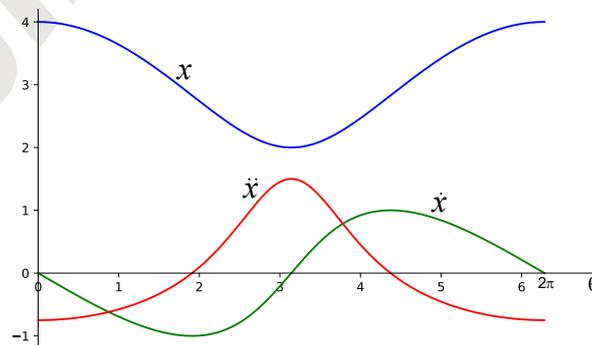


Figura 6.6 Gráficos de deslocamento, velocidade e aceleração para a variável x , na inversão do mecanismo Biela Manivela.

Quadrilátero Articulado

Para o caso do quadrilátero articulado, todas as barras têm movimento angular, não havendo qualquer complicação na determinação das velocidades e acelerações, porém para os deslocamentos teremos que utilizar de um artifício especial com a colocação de uma quarta coordenada φ , figura 6.7, que não entrará na definição do sistema de coordenadas generalizadas.

Determinação dos Deslocamentos

Seja então a composição de vetores mostrada na figura 6.7b, com a qual podemos escrever a seguinte equação vetorial:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{d} = \vec{0} \quad (6.52)$$

E separando as partes real e imaginária para os vetores da equação (6.52), o que significa decompor as projeções algébricas das barras nas direções x e y, obteremos o sistema de equações não lineares nas incógnitas α e β .

$$\begin{cases} a \cos \theta + b \cos \varphi - c \cos \beta - d = 0 \\ a \sin \theta + b \sin \varphi - c \sin \beta = 0 \end{cases} \quad (6.53)$$

Após isolarmos o $\cos \alpha$ na primeira linha e o $\sin \alpha$ na segunda, podemos efetuar a soma dos quadrados dos dois, obtendo:

$$b^2 = c^2 + a^2 + d^2 - 2ac \cos \beta \cos \theta - 2ac \sin \beta \sin \theta + 2cd \cos \beta - 2ad \cos \theta \quad (6.54)$$

Agora adicionando c^2 em ambos os lados da equação (6.54) e reagrupando, teremos:

$$b^2 + c^2 - a^2 - d^2 + 2ad \cos \theta = 2c^2 - 2ac \cos \beta \cos \theta - 2ac \sin \beta \sin \theta + 2cd \cos \beta \quad (6.55)$$

Verificando que o ângulo φ , devidamente colocado na figura 6.5 para facilitar a simplificação das equações resultantes, pode ser equacionado como a seguir:

$$2bc \cos \varphi = b^2 + c^2 - a^2 - d^2 + 2ad \cos \theta \quad (6.56)$$

E que o lado direito desta equação se assemelha também ao lado esquerdo da equação (6.55), podemos escrever:

$$b \cos \varphi = c + (d - a \cos \theta) \cos \beta - a \sin \theta \sin \beta \quad (6.57)$$

A equação (6.57) tem fácil solução se substituirmos o $\cos \beta$ e o $\sin \beta$ pela identidade trigonométrica, como mostrado na equação (6.58).

$$\cos \beta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}} \quad \text{e} \quad \sin \beta = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}} \quad (6.58)$$

Chegaremos à equação quadrática em (6.59),

$$(-c + d - a \cos \theta + b \cos \varphi) \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + 2a \sin \theta \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} - c - d + a \cos \theta + b \cos \varphi = 0 \quad (6.59)$$

Cuja solução em $\operatorname{tg} \beta/2$ é imediata:

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{-a \sin \theta \pm \sqrt{a^2 + d^2 - b^2 - c^2 - 2ac \cos \theta + 2bc \cos \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}{-c + d - a \cos \theta + b \cos \varphi} \quad (6.60)$$

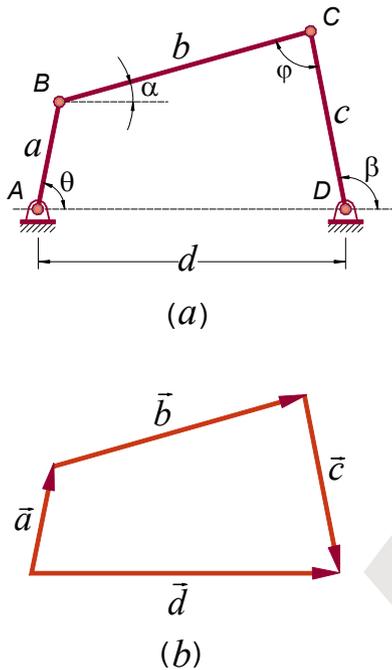


Figura 6.7 Quadrilátero articulado, com um ângulo φ extra, e sua composição vetorial.

Que vai fornecer para β , após reagrupamento e eliminação de termos semelhantes no radical, o valor:

$$\beta = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{a \operatorname{sen} \theta \mp b \operatorname{sen} \varphi}{c - d + a \cos \theta - b \cos \varphi} \right) \quad (6.61)$$

Em que o sinal *negativo* no numerador deve prevalecer se estivermos utilizando a construção normal como mostrada na figura 6.5. O sinal *positivo* se aplicaria à construção cruzada onde as barras “ b ” e “ c ” se apresentariam espelhadas segundo o segmento BD.

Da mesma forma se isolarmos o $\cos \beta$ na primeira linha e o $\operatorname{sen} \beta$ na segunda, efetuando a soma dos quadrados dos dois e desenvolvendo as expressões como fizemos acima, vamos obter ao final:

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{-a \operatorname{sen} \theta \pm c \operatorname{sen} \varphi}{b + d - a \cos \theta - c \cos \varphi} \right) \quad (6.62)$$

Com as mesmas considerações para o uso do sinal positivo ou negativo no numerador ou seja, sinal positivo para o caso da figura 6.5.

Determinação das Velocidades

Voltando à equação (6.53) e verificando as derivadas parciais, iremos obter o Jacobiano do sistema:

$$\underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} -b \operatorname{sen} \alpha & c \operatorname{sen} \beta \\ b \cos \alpha & -c \cos \beta \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

E o conseqüentemente a sua inversa:

$$\underset{\sim}{J}^{-1} = -\frac{1}{bc \operatorname{sen}(\alpha - \beta)} \begin{bmatrix} c \cos \beta & c \operatorname{sen} \beta \\ b \cos \alpha & b \operatorname{sen} \alpha \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

E para a matriz coluna $\underset{\sim}{b}$:

$$\underset{\sim}{F} = \begin{Bmatrix} -a \operatorname{sen} \theta \\ a \cos \theta \end{Bmatrix} \quad (6.65)$$

Aplicando então (6.27), chegamos a:

$$k_\alpha = \frac{a \operatorname{sen}(\beta - \theta)}{b \operatorname{sen}(\alpha - \beta)} \quad \text{e} \quad k_\beta = \frac{a \operatorname{sen}(\alpha - \theta)}{c \operatorname{sen}(\alpha - \beta)} \quad (6.66)$$

Determinação das Acelerações

Mais uma vez devemos considerar conhecida a aceleração angular da barra de entrada. Aplicando-se as equações (6.35) e (6.36), iremos obter:

$$\underset{\sim}{K}_q = \begin{Bmatrix} -\frac{a \cos(\beta - \theta)}{b \operatorname{sen}(\alpha - \beta)} \\ -\frac{a \cos(\alpha - \theta)}{c \operatorname{sen}(\alpha - \beta)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k_\alpha \cotg(\beta - \theta) \\ -k_\beta \cotg(\alpha - \theta) \end{Bmatrix} \quad (6.67)$$

e:

$$\underset{\sim}{J}_k = \begin{bmatrix} -k_\alpha \cotg(\alpha - \beta) & k_\alpha \cotg(\beta - \theta) + k_\alpha \cotg(\alpha - \beta) \\ k_\beta \cotg(\alpha - \theta) - k_\beta \cotg(\alpha - \beta) & -k_\beta \cotg(\alpha - \beta) \end{bmatrix} \quad (6.68)$$

Agora, aplicando (6.34), teremos:

$$\begin{aligned} \ell_\alpha &= k_\alpha(k_\beta - 1) \cotg(\beta - \theta) + k_\alpha(k_\beta - k_\alpha) \cotg(\alpha - \beta) \\ \ell_\beta &= k_\beta(k_\alpha - 1) \cotg(\alpha - \theta) + k_\beta(k_\beta - k_\alpha) \cotg(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (6.69)$$

Quando então, obteremos a equação final da aceleração na seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} = \ddot{\theta} \begin{Bmatrix} k_{\alpha} \\ k_{\beta} \end{Bmatrix} + \dot{\theta}^2 \begin{Bmatrix} \ell_{\alpha} \\ \ell_{\beta} \end{Bmatrix} \quad (6.70)$$

Substituição Numérica

Dada a importância do quadrilátero articulado vamos aqui analisar as curvas de deslocamento, velocidade e aceleração nas variáveis α e β como fizemos nos dois exemplos anteriores.

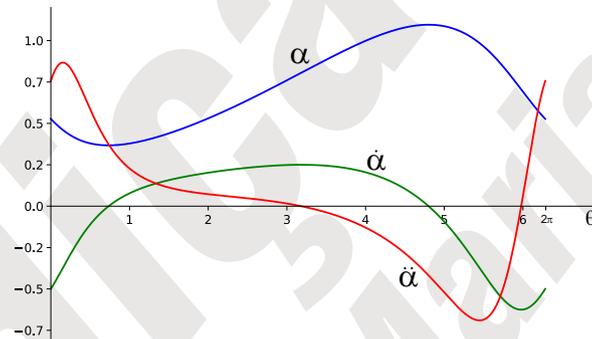


Figura 6.8 Deslocamento, velocidade e aceleração angular da barra b, em função do deslocamento θ .

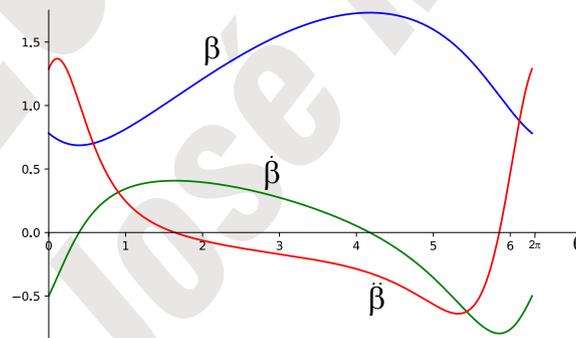


Figura 6.9 Deslocamento, velocidade e aceleração angular da barra c, em função do deslocamento θ .

Na obtenção dos gráficos acima, foi considerando uma velocidade angular constante para a barra a e os valores de 1, 5, 6, 4 e 3 para as barras a, b, c e d respectivamente.

6.4. Mecanismos com mais de Quatro Barras

O nosso maior problema aqui vai recair na inversão, de forma analítica, de uma matriz quadrada de ordem $n \times n$, onde n , sempre par, será maior ou igual a 4. Felizmente, no caso de cadeias impostas, a matriz jacobiana do sistema sempre será esparsa permitindo que desenvolvamos um método de solução baseado na inversão de algumas matrizes de ordem 2×2 , como veremos a seguir.

Antes de passarmos à situação geral, vejamos o caso de uma cadeia imposta com oito barras. Neste caso a quantidade de equações de restrição será

seis, conseqüentemente com seis coordenadas generalizadas secundárias s_i desconhecidas e uma principal q conhecida, desta forma a matriz jacobiana do sistema deverá ter a forma apresentada na equação (6.71).

$$J \approx \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

Caso a matriz jacobiana encontrada não se encontre na forma apresentada em (6.71), isto pode ser obtido a partir de operações elementares - aqui apenas permutações serão necessárias - nas linhas e/ou colunas desta, porém estas operações, é claro, devem ser feitas considerando a equação matricial completa apresentada em (6.72), pois elas vão refletir nas linhas da matriz \bar{b} ou da matriz \mathbf{b} , dependendo de serem permutações em linhas ou colunas de \mathbf{B} .

Partindo da obtenção da matriz \bar{b} pela equação (6.27), esta pode ser colocada em sua forma inicial $\mathbf{B} \cdot \bar{b} = -\mathbf{b}$, e subdividindo-se as matrizes em blocos, a nova equação matricial tem a forma apresentada na equação (6.72).

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix} \quad (6.72)$$

Desta subdivisão, a primeira linha de blocos, vai permitir que se extraia a equação (6.73).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad (6.73)$$

De onde podemos obter, de imediato, os valores de b_1 e b_2 pela inversão de uma matriz quadrada simples. E agora, com b_2 conhecido, podemos montar o segundo bloco.

$$\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} - b_2 \begin{Bmatrix} a_{32} \\ a_{42} \end{Bmatrix} \quad (6.74)$$

E outra vez, como da forma anterior, vamos poder obter os valores de b_3 e b_4 pela inversão de uma matriz quadrada simples. Novamente agora com b_4 conhecido, podemos montar o terceiro e último bloco.

$$\begin{bmatrix} a_{55} & a_{56} \\ a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_5 \\ b_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix} - b_4 \begin{Bmatrix} a_{54} \\ a_{64} \end{Bmatrix} \quad (6.75)$$

E, finalmente a equação (6.75) vai permitir que obtenhamos os dois últimos valores, b_5 e b_6 , por uma inversão de matriz 2×2 , finalizando o problema.

Agora, no caso de mecanismos de seis barras a matriz \mathbf{B} vai ter a forma apresentada na equação (6.76), ainda que para isto tenhamos que efetuar operações elementares na mesma.

$$J \approx \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (6.76)$$

$$\varphi = \arctg \left(\frac{r \operatorname{sen} \theta}{d - r \cos \theta} \right) \quad (6.79)$$

$$y = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}$$

Onde foi desconsiderado o sinal negativo para a segunda expressão, considerando-se que y é um escalar, não podendo pois assumir valores negativos. Conhecidas agora as variáveis φ e y , fica fácil a determinação de β e x a partir das duas últimas linhas da equação (6.78).

$$\beta = \operatorname{arcsen} \left(\frac{c + d - a \cos \varphi}{b} \right) \quad (6.80)$$

$$x = b \cos \beta - a \operatorname{sen} \varphi$$

Determinação das Velocidades

Para este caso, o jacobiano do sistema, equação (6.78), nas variáveis secundárias y , φ , β e x , será uma matriz 4×4 que pode ser vista na equação (6.81) logo abaixo.

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -y \operatorname{sen} \varphi & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \varphi & y \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & -a \operatorname{sen} \varphi & b \cos \beta & 0 \\ 0 & a \cos \varphi & b \operatorname{sen} \beta & 1 \end{bmatrix} \quad (6.81)$$

E a matriz \mathbf{b} será:

$$\tilde{F} = \begin{Bmatrix} -r \operatorname{sen} \theta \\ -r \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.82)$$

Agora, montando o sistema, como descrito pela equação (6.72), chegaremos à equação matricial mostrada na equação (6.83) já com a subdivisão em blocos definida.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \cos \varphi & -y \operatorname{sen} \varphi & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \varphi & y \cos \varphi & 0 & 0 \\ \hline 0 & -a \operatorname{sen} \varphi & b \cos \beta & 0 \\ 0 & a \cos \varphi & b \operatorname{sen} \beta & 1 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} k_y \\ k_\varphi \\ k_\beta \\ k_x \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} -r \operatorname{sen} \theta \\ -r \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.83)$$

Externando os blocos compostos pelas matrizes 2×2 , vamos ter primeiramente, como indicado pela equação (6.73), o sistema matricial abaixo.

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -y \operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & y \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_y \\ k_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \operatorname{sen} \theta \\ r \cos \theta \end{Bmatrix} \quad (6.84)$$

Este vai fornecer, após a inversão da matriz principal, os valores de k_y e k_φ , como mostrado a seguir.

$$\begin{Bmatrix} k_y \\ k_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \operatorname{sen}(\varphi + \theta) \\ \frac{x}{y} \cos(\varphi + \theta) \end{Bmatrix} \quad (6.85)$$

A partir da obtenção de k_y e k_φ , a equação (6.74) tomará a forma:

$$\begin{bmatrix} b \cos \beta & 0 \\ b \operatorname{sen} \beta & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_\beta \\ k_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - k_\varphi \begin{Bmatrix} -a \operatorname{sen} \varphi \\ a \cos \varphi \end{Bmatrix} \quad (6.86)$$

E, teremos finalmente os valores de k_β e k_x , equação (6.87), pela inversão

de uma simples matriz 2×2 .

$$\begin{Bmatrix} k_\beta \\ k_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{ar \operatorname{sen} \varphi \cos(\theta + \varphi)}{by \cos \beta} \\ -\frac{ar \cos(\beta - \varphi) \cos(\theta + \varphi)}{y \cos \beta} \end{Bmatrix} \quad (6.87)$$

A partir destes valores podemos determinar todas as velocidades, mas para o problema em apreço só nos vai interessar a velocidade do torpedo que neste caso será obtido por $\dot{x} = \theta k_x$.

Determinação da Aceleração

Aqui vamos simplificar consideravelmente o problema, lembrando que a aceleração $\ddot{\theta}$ é nula e também que só nos interessa a obtenção da aceleração do torpedo, então a expressão $\mathbf{b} = \ddot{\theta} \mathbf{b} + \theta^2 \mathcal{D}$, fica reduzida a $\mathbf{b} = \theta^2 \mathcal{D}$. O interesse apenas na aceleração do torpedo, nos leva a considerar somente a última linha da matriz \mathbf{b}_q e última linha da matriz \mathbf{b}_s , então, para a matriz \mathbf{b}_q a última linha consiste na derivada parcial $\partial k_x / \partial \theta$ e vai ter a forma:

$$\frac{\partial k_x}{\partial \theta} = \frac{ar \operatorname{sen}(2\varphi + \theta - \beta) + \operatorname{sen}(\theta + \beta)}{2 y \cos \beta} \quad (6.88)$$

E para a última linha da matriz \mathbf{b}_s teremos quatro derivadas parciais, mostradas na sequência abaixo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_x}{\partial \varphi} &= ar \frac{\operatorname{sen}(2\varphi + \theta - \beta)}{y \cos \beta} \\ \frac{\partial k_x}{\partial y} &= \frac{ar \cos(2\varphi + \theta - \beta) + \cos(\theta + \beta)}{2 y^2 \cos \beta} \\ \frac{\partial k_x}{\partial \beta} &= -ar \frac{\operatorname{sen}(2\varphi + \theta) - \operatorname{sen} \theta}{2y \cos^2 \beta} \\ \frac{\partial k_x}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (6.89)$$

E agora, podemos equacionar o coeficiente da aceleração para o torpedo por:

$$\ell_x = \frac{\partial k_x}{\partial \theta} + \frac{\partial k_x}{\partial \varphi} k_\varphi + \frac{\partial k_x}{\partial y} k_y + \frac{\partial k_x}{\partial \beta} k_\beta + \frac{\partial k_x}{\partial x} k_x \quad (6.90)$$

E, finalmente, a aceleração do torpedo será dada por:

$$\ddot{x} = \dot{\theta}^2 \ell_x \quad (6.91)$$

Substituição Numérica

Considerando-se uma velocidade angular constante para a barra "r" e com os valores $r = 1$, $a = 6$, $b = 1,8$, $c = 2,5$ e $d = 2,8$ para as diversas barras, foi possível se levantar, numericamente, os gráficos de deslocamento, velocidade e aceleração para o torpedo, estes mostrados na figuras 6.11 a seguir.

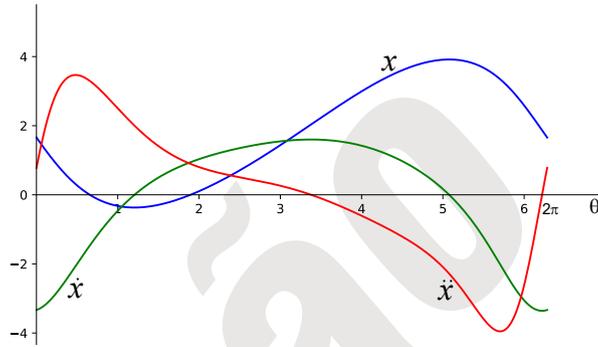


Figura 6.11 Gráficos de deslocamento, velocidade e aceleração para o torpedo no mecanismo da Plaina Limadora.

6.5. Abordagem Simplificada

Em algumas situações, como no caso da plaina limadora visto acima, o interesse na análise cinemática recai em apenas uma das barras do mecanismo e não em todas as barras como foi desenvolvido até agora. Neste caso, se pudermos equacionar é claro, teremos apenas uma única equação de restrição e consequentemente vamos poder obter as expressões de deslocamento, velocidade e aceleração em função apenas da variável principal, bem como as matrizes serão todas unitárias, ou seja iremos nos deparar somente com escalares, facilitando em muito a resolução do problema.

Vejamos o exemplo de uma outra inversão de seis barras que também é uma plaina limadora, figura 6.12. O torpedo tem comprimento ℓ e o seu deslocamento, velocidade e aceleração serão dados por x , \dot{x} e \ddot{x} respectivamente, aqui também vamos considerar a barra r como sendo a barra motora e portanto serão conhecidos também θ , $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$. Aqui não vamos considerar a plaina em regime, ou seja $\dot{\theta} \neq 0$.

Determinação dos Deslocamentos

Olhando ligeiramente a figura 6.12, podemos perceber que a parte inferior é análoga à cadeia que é uma inversão do biela manivela, apresentada na figura 6.4, como consequência desta analogia vamos ter, para este caso:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r \operatorname{sen} \theta}{b + r \cos \theta} \quad (6.92)$$

Porém a geometria da figura deixa claro que:

$$\frac{\ell - x}{a} = \operatorname{tg} \varphi \quad (6.93)$$

Ou seja:

$$\frac{\ell - x}{a} = \frac{r \operatorname{sen} \theta}{b + r \cos \theta} \quad (6.94)$$

Com isto, equação (6.94), podemos montar uma única equação de restrição, na forma:

$$(\ell - x)(b + r \cos \theta) - ar \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (6.95)$$

E, a partir desta equação obtemos o valor do deslocamento para o tor-

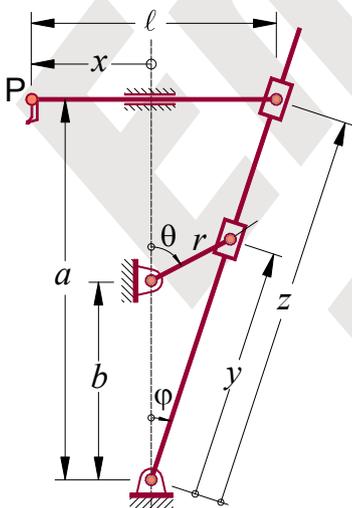


Figura 6.12 Uma outra Inversão da Plaina Limadora para o cálculo da cinemática do torpedo.

pedo.

$$x = \ell - \frac{ar \operatorname{sen} \theta}{b + r \cos \theta} \quad (6.96)$$

Note, com isto, que o sistema de coordenadas generalizadas para este problema passa a ser apenas (θ, x) e não $(\theta, \varphi, y, z, x)$, como se poderia supor, e que iria deixar a resolução do problema bem mais complicada.

Determinação da Velocidade

A matriz \mathbf{B} , agora um escalar, vai ser obtida pela derivada parcial, em x , da primeira parte da equação em (6.95).

$$j = \frac{\partial}{\partial x} [(\ell - x)(b + r \cos \theta) - ar \operatorname{sen} \theta] = -(b + r \cos \theta) \quad (6.97)$$

E a matriz \mathbf{b} também um escalar, vai ser obtida pela derivada parcial, em θ , na primeira parte da equação em (6.95).

$$f = \frac{\partial}{\partial \theta} [(\ell - x)(b + r \cos \theta) - ar \operatorname{sen} \theta] = -r[(\ell - x) \operatorname{sen} \theta + a \cos \theta] \quad (6.98)$$

Agora, por se tratar de valores escalares, a expressão (6.27) se torna:

$$k_x = -j^{-1} f = -\frac{f}{j} = -r \frac{(\ell - x) \operatorname{sen} \theta + a \cos \theta}{b + r \cos \theta} \quad (6.99)$$

Substituindo, na equação (6.99), o valor de x encontrado na equação (6.96), vamos ficar com:

$$k_x = -ar \frac{r + b \cos \theta}{(b + r \cos \theta)^2} \quad (6.100)$$

E agora o valor para a velocidade do torpedo vem facilmente pela expressão $\dot{x} = \theta \cdot k_x$.

Determinação da Aceleração

Aqui a matriz \mathbf{D} também seria unitária, então passemos logo ao cálculo de ℓ_x que vai ser dado por:

$$\ell_x = \frac{\partial k_x}{\partial \theta} + \frac{\partial k_x}{\partial x} k_x = -ar \operatorname{sen} \theta \frac{2r^2 - b(b - r \cos \theta)}{(b + r \cos \theta)^3} + 0 \cdot k_x \quad (6.101)$$

Com isto teremos o valor da aceleração que vai ser dado por:

$$\ddot{x} = \ddot{\theta} k_x + \dot{\theta}^2 \ell_x \quad (6.102)$$

Equação esta que está completa, vez que as equações (6.100) e (6.101) a complementam deixando tudo em função da variável θ .

6.6. Implementação em Python

Uma vez que as expressões apresentadas são equações algébricas elementares, é claro que podemos desenvolver uma implementação computacional, seja através de programação direta ou com a utilização de ferramentas matemáticas existentes, neste último caso vamos precisar de aplicativos que manipulem matemática simbólica pelo fato de sempre buscarmos expressões literais que nos informam muito mais sobre a cinemática do mecanismo, seja

pela possibilidade do traçado de gráficos, que nos dão uma ampla percepção na análise do problema, ou pela análise de valores pontuais. À esse respeito, dispomos de inúmeras ferramentas disponíveis, sejam gratuitas ou pagas, podemos citar, por exemplo, o Mathcad[®], o Mathematica[®] ou o Maple[®] como ferramentas pagas de excelente desempenho e que suprem perfeitamente a nossa demanda.

A programação direta vai requerer um esforço maior de nossa parte, mas com a vantagem de não dispendermos nenhum pagamento. As linguagens utilizadas são as mais diversas, tais como o C++, o FORTRAN, o Julia e o Python dentre outras. Aqui especificamente vamos utilizar o Python pelo fato de esta linguagem apresentar vários pacotes prontos, sento um deles, o Sympy, de suma importância para as nossas aplicações, esta biblioteca traz diversas funções de manipulação algébrica simbólica, em especial as que tratam de matrizes e diferenciações literais, como um exemplo rápido, nós temos, internamente no Sympy, a função `jacobian([])` que simplifica consideravelmente os nossos cálculos com expressões literais.

Os códigos que se seguem podem ser rodados em qualquer interpretador python, mas especificamente eles se adaptam melhor ao IPython, através da plataforma Jupyter e jupyter lab que podem ser acessadas on-line, jupyter.org, e também à página “live.sympy.org” que permite o uso direto de código python especificamente científico.

Para instalar o python e configurar o ambiente de trabalho, siga os passos recomendados na página “Instalação do Python“. Perceba que o `jupyter` on-line não precisa de instalação.

Nos códigos que se seguem, a primeira linha importa as classes da biblioteca `sympy` e a segunda invoca o uso de latex para mostrar as expressões de uma forma matemática mais exata.

```
from sympy import *
init_printing(use_latex='mathjax')
```

Estas duas primeiras linhas não precisam ser colocadas no site “live.sympy.org”, pois este já as invoca internamente.

Eventualmente, caso se queira utilizar a plotagem de gráficos – não funciona no site “live.sympy.org” – a linha abaixo dever ser acrescentada.

```
from sympy.plotting import plot, plot_parametric
```

Código para Mecanismos de Quatro e Seis Barras

Os códigos a seguir, apesar de serem direcionados para o mecanismo Biela Manivela ou para o Quadrilátero Articulado, podem ser adaptados para qualquer outra cadeia, com quatro barras, inclusive as inversões correspondentes, necessitando para isto apenas uma permutação nas variáveis e uma adequação na matriz que constitui o sistema de equações de restrição.

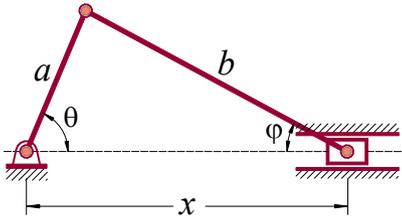


Figura 6.13 Mecanismo Biela Manivela mostrando-se as constantes simbólicas e as variáveis.

```

1 # Script para solução de mecanismos de 4 ou 6 barras
2 from sympy import *
3
4 def Mec_Solve(*arg):
5     EqRest = arg[5:9] if len(arg) > 6 else arg[3:5]
6     VarSec = arg[1:5] if len(arg) > 6 else arg[1:3]
7     Ks = arg[9] if len(arg) > 6 else arg[5]
8     Eq = Matrix(EqRest)
9     J = Eq.jacobian(VarSec); F = Eq.jacobian([arg[0]])
10    K = simplify( -(J**-1)*F )
11    L=simplify(K.jacobian([arg[0]])+(K.jacobian(VarSec)*Ks))
12    pprint('Velocidades'); display(K*vq)
14    pprint('Acelerações'); display(K*aq + L*vq**2)
15
16    '''===== Variáveis específicas da cadeia ====='''
17    '''===== que está sendo resolvida ====='''
18    a,..,.. = symbols('a .. ..') # Def. das constantes
19    q,vq,aq=symbols('.. \dot{..} \ddot{..}') # Var. principal
20    ..,.. = symbols('.. ..') # Vars. secundárias
21    k..,k.. = symbols('k_{..} k_{..}') # Coefs. de velocidade
22
23    f1 = <eq. restrição 1> # Escreva aqui todas as linhas
24    f2 = <eq. restrição 2> # das equações de restrição
25
26    fn = <eq. restrição n>
27
28    Mec_Solve(q,..,..,f1,f2,..,Matrix([k..,k..]))
29    ''' Os primeiros argumentos da função "Mec_Solve" se-
30        rão as coordenadas generalizadas seguidos das linhas
31        das equações de restrição e por fim uma matriz mon-
32        tada com os coeficientes de velocidade definidos no
33        último symbols.
34    '''

```

Mecanismo Biela Manivela

Para uma melhor compreensão da colocação dos diversos símbolos, o código abaixo se refere à figura 6.13.

```

1 from sympy import *
2 init_printing(use_latex = 'mathjax')
3
4 a,b,x,q,j = symbols('a b x theta varphi')
5 vj,vx,vq=symbols('\dot{\varphi} \dot{x} \dot{\theta}')
6 kj,kx,aq = symbols('k_{\varphi} k_x \ddot{\theta}')
7
8 Ks = Matrix([kj,kx])
9
10 Eq = Matrix([ [a*cos(q) + b*cos(j) - x],
11              [a*sin(q) - b*sin(j)] ])
12
13 J = Eq.jacobian([j,x])
14 F = Eq.jacobian([q])
15 K = simplify( -(J**-1)*F )
16
17 L = simplify(K.jacobian([q]) + ( K.jacobian([j,x]) )*Ks)
18
19 Sv = K*vq
20 Sa = K*aq + L*vq**2

```

Dado que as linhas 1 e 2 já foram explanadas acima, vamos começar pelas linhas 4, 5 e 6, aqui temos a declaração de símbolos. Para o Sympy, toda variável que não vai receber algum valor em Python, seja este valor numérico, do tipo caractere ou string, deve ser declarada como símbolo, é então o caso das constantes a e b e das variáveis θ , φ e x , e das demais variáveis nas linhas 5 e 6. A função `symbols()` define como a variável deve ser impressa quando for referenciada, apesar de no texto do código não podermos utilizar caracteres gregos, na impressão isto é possível pelo fato de o Sympy utilizar sempre uma impressão gráfica mesmo na tela do computador, portanto quando for solicitada a impressão do símbolo “q”, o Sympy irá imprimir a letra grega θ e assim, o mesmo para a letra “j” que terá impressa a letra grega φ . Nas linhas 5 e 6, a função `symbols` se utiliza de códigos LATEX para expressar variáveis com um ponto ou dois pontos em cima, como é o caso da representação das derivadas primeira e segunda, no tempo, que expressam velocidade e aceleração, respectivamente.

Na linha 10, temos a atribuição do sistema de equações de restrição à variável “Eq” em forma de matriz, perceba que esta não foi definida como `symbol` e, portanto pode receber valores, entre parênteses temos a sintaxe de construção de matriz para a função `Matrix()`.

O Sympy dispõe de uma gama muito extensa de funções matemáticas e, em particular da álgebra linear, nas linhas 12 e 13 temos a função `jacobian()` que retorna, na forma de uma matriz, o Jacobiano de um sistema de equações - este introduzido na forma matriz - nas variáveis que são passadas como argumento, estas são passadas em forma de lista.

A linha 14 retorna, na variável “K”, o produto da inversa da matriz “J” pela matriz “F” e a função `simplify()` simplifica este produto no sentido de se ter uma expressão final o mais enxuta possível.

Após estes entendimentos, a linha 16 deixa claro que a variável “L” está recebendo o Jacobiano da matriz “K”, na variável θ , somado ao produto do Jacobiano da matriz “K”, nas variáveis φ e x , pela própria matriz “K”.

Finalmente as linhas 18 e 19 atribuem velocidade e aceleração, matrizes, às variáveis “Sv” e “Sa”, para que sejam impressas posteriormente.

O disposto acima vem apenas mostrar a facilidade de implementação dos algoritmos na linguagem python para a solução de problemas em mecanismos de barras, porém este trabalho não é proposto ao aluno uma vez que todos estes códigos já foram desenvolvidos, de forma generalizada e disponibilizado para uso na plataforma GitHub.

No site <https://github.com/Mecanismos-UFPE>, o aluno pode ter acesso a diversos códigos voltados especificamente à disciplina Mecanismos e, especialmente para mecanismos articulados tem-se a pasta “Python-MecBarras”, entrando nesta pasta o aluno pode consultar os diversos módulos disponíveis, obtendo um tutorial sumarizado sobre a utilização de cada um, em particular

para o assunto deste capítulo o módulo “LinkageMechanism” deve ser consultado e efetuado o download do código para uso no sentido de conferência dos diversos exercícios deste livro.

Módulo	Descritivo
 <p>Permutacao.py</p> <p>Permutacao</p>	<p>Neste código serão geradas todas as permutações para uma cadeia cinemática, imposta, com N barras, dispostas em uma tabela simplificada. (código em Julia).</p>
 <p>LinkageMechanism.py</p> <p>LinkageMechanism</p>	<p>Permite se obter os coeficientes de velocidade e aceleração para cadeias impostas e não impostas, bem como os valores de F, J, K e L.</p>
 <p>CouplerPoint.py</p> <p>CouplerPoint</p>	<p>A utilização deste código permite obter o deslocamento, velocidade e aceleração para o ponto acoplador.</p>

Figura 6.14 Utilização do código fonte, disponível no GitHub, para o mecanismos de barras.

6.7. Exercícios

1. Encontre as equações de deslocamento, velocidade e aceleração para o pistão no mecanismo Biela Manivela, figura 6.1, utilizando apenas (θ, x) para o sistema de coordenadas generalizadas.
2. Sabendo que a entrada se dá pela barra “r”, encontre as equações de deslocamento, velocidade e aceleração para a barra “b”, utilizando apenas (θ, φ) para o sistema de coordenadas generalizadas.

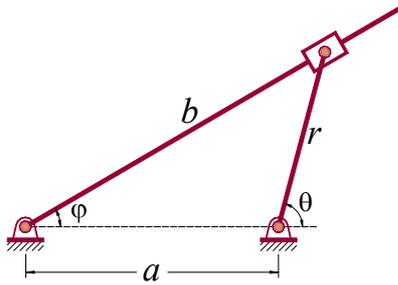


Figura 6.17-2 Inversão do Biela Manivela, com duas coordenadas generalizadas.

3. Desenvolva o código, em Python, que irá fornecer o deslocamento, velocidade e aceleração para a barra “b” do problema 2 e também imprima os seus gráficos.
4. Para o mecanismo da figura 6.17-2 determine os deslocamentos, velocidades e acelerações considerando agora que a entrada se faça pela barra “b”.
5. No mecanismo de impulsão da agulha em máquinas que costuram encerados. Determine as equações de deslocamento, velocidade e aceleração para a ponta **P**, da agulha, sabendo-se que a entrada se faz pela barra “r”.

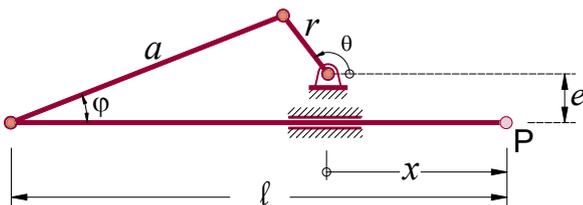


Figura 6.18-5 Inversão da agulha, para o mecanismo Biela Manivela

6. No problema anterior, veja se é possível, equacionar o deslocamento “x” em função apenas do ângulo θ . Se for o caso, encontre a velocidade “ \dot{x} ”.
7. Para a plaina limadora da figura 6.12, determine a

velocidade e a aceleração pela diferenciação direta, em relação ao tempo, da equação (6.96) e compare os resultados com a expressões (6.100) e (6.101), para isto considere nula a aceleração da barra “r”.

8. No mecanismo abaixo, a barra “a” recebe o movimento motor e tem um comprimento de 2 cm, mostre que quando o deslocamento, velocidade e a aceleração angulares, desta barra forem $\theta = 120^\circ$, $\dot{\theta} = 2 \text{ rad/seg}$ e $\ddot{\theta} = \sqrt{3} \text{ rad/seg}^2$, respectivamente, a aceleração do pistão será $\ddot{x} = 100 \text{ cm/seg}^2$.

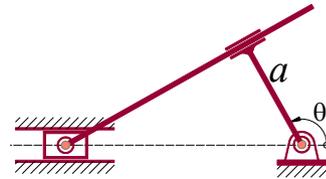


Figura 6.19-8 Biela Manivela com dois pares do tipo prismático.

9. No mecanismo da figura, a barra “a”, que recebe a entrada, se mantém perpendicular à barra “b” devido ao par cinemático do tipo prismático entre as duas. Determine a aceleração \ddot{x} , do ponto **P**.

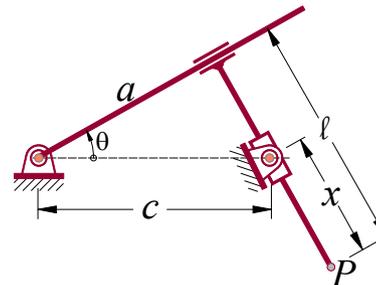


Figura 6.20-9 Biela Manivela de dois pares prismáticos com ponto acoplador.

10. No mecanismo mostrado, considerando conhecidos o deslocamento, velocidade e aceleração angulares da barra “a”. Determine o deslocamento velocidade e aceleração para a barra “b”.

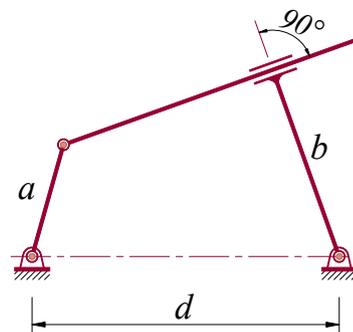


Figura 6.21-10 Quadrilátero Articulado com um par prismático, cinemática da barra “b”.

11. No problema anterior, ainda mantendo a entrada pela barra “a”, determine a aceleração da barra que se liga à esta e é perpendicular à barra “b”.

12. No mecanismo mostrado, a barra “l” forma um ângulo, constante, de 90° na sua parte superior. Verifique se a aceleração do pistão horizontal pode ser dada por:

$$\ddot{x} = k_x \left[\ddot{\theta} - 2\dot{\theta}^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin 2\theta} \right] \quad (6.103)$$

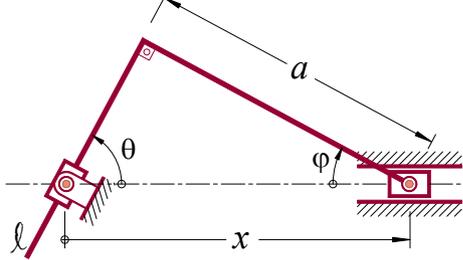


Figura 6.22-12 Mecanismo com barra dobrada em 90 graus.

13. No mecanismo mostrado, são conhecidos o deslocamento, velocidade e aceleração do pistão horizontal. Determine a aceleração do pistão vertical, sabendo que a barra que une os dois pistões tem comprimento “a”.

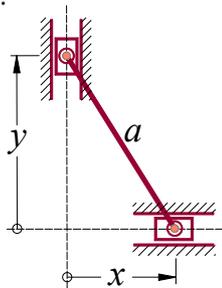


Figura 6.23-13 Mecanismo com dois pistões ortogonais interligados por uma barra rígida.

14. Conhecendo-se as coordenadas generalizadas (θ, φ, x) e sabendo-se que a entrada se faz pela barra “a”, determine a acelerações para as coordenadas secundárias.

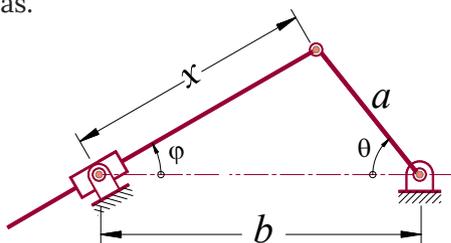


Figura 6.24-14 Mais uma Inversão do mecanismo Biela Manivela.

15. Resolva o problema anterior, apenas para a coordenada “x”, considerando (θ, x) para o sistema de coordenadas generalizadas e determine o ângulo θ para o qual a velocidade \dot{x} seja máxima.

16. Determine a equação da a velocidade para o pistão no mecanismo de inversão do Biela Manivela, figura 6.4, utilizando apenas (θ, x) para o sistema de coordenadas generalizadas e, a partir disto encontre o valor de θ , em função apenas de “a” e de “r”, onde ocorrem os valores de máximo e mínimo da velocidade.

17. Sabendo-se que a entrada se faz pela barra “r” e utilizando o sistema de coordenadas generalizadas (θ, φ, z, y, x), para o mecanismo mostrado na figura, determine os coeficientes de velocidade (k_x, k_y) e aceleração (l_x, l_y) para o ponto P.

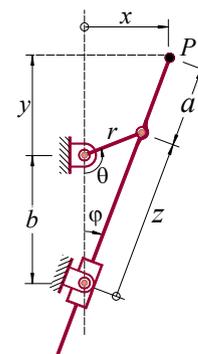


Figura 6.25-17 Cinemática de ponto do acoplador pelo processo normal.

18. No problema anterior, obtenha os deslocamentos (x, y) do ponto P, em função apenas das constantes envolvidas e da variável θ .

19. A cadeia dada, tem ($\theta, \alpha, x, \varphi, y$) para coordenadas generalizadas, verifique se a expressão, mostrada abaixo, pode expressar a velocidade relativa entre os pistões.

$$\dot{\theta} \frac{b}{x} \cos(\alpha - \theta) [x \operatorname{tg}(\alpha - \theta) - y \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)] \quad (6.104)$$

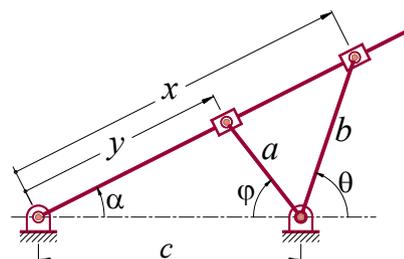


Figura 6.26-19 Cadeia de seis barras cálculo da velocidade de relativa entre os pistões.

20. No mecanismo mostrado, o pistão P, tem conhecidos o deslocamento, velocidade e aceleração, considere verticalmente (x, \dot{x}, \ddot{x}). Determine então, o deslocamento, velocidade e aceleração para pistão Q, considere uma coordenada vertical “y”.

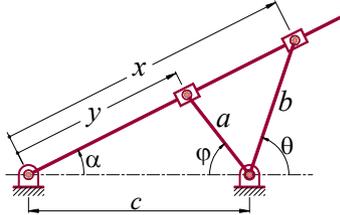


Figura 6.27-20 Relação de velocidades e acelerações entre os pistões.

21. No problema anterior, considerando coordenadas verticais “x” e “y” para os pistões, determine a relação entre as velocidades dos pistões, considerando que a entrada agora se faça pela barra “b”.

22. No mecanismo dado, a entrada se faz pela barra “d”, conhecidos portanto $\theta, \dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$. Nestas condições, determine o deslocamento do pistão horizontal e também os seus coeficientes de velocidade e aceleração k_x e l_x .

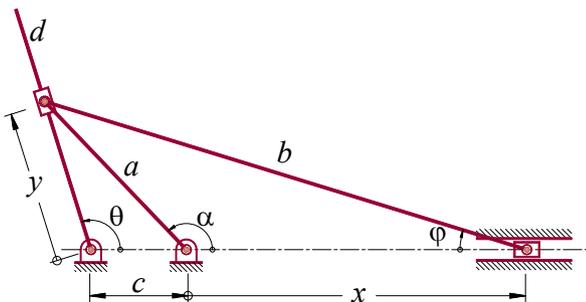


Figura 6.28-22 Velocidade e aceleração do pistão horizontal na cadeia genérica de seis barras.

23. No problema anterior, considere agora que a entrada se faça pelo pistão horizontal com x, \dot{x} , e \ddot{x} conhecidos e, desta forma, determine os coeficientes de velocidade e de aceleração para o pistão que se apoia na barra “d”.

24. Na plaina limadora mostrado na figura, a barra que contém os segmentos “a” e “b”, é ternária contendo três elementos cinemáticos rotativos colineares, a barra “r” recebe o movimento motor, sendo conhecidos portanto $\theta, \dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$. Determine então, o deslocamento, velocidade e a aceleração para o torpedo (x, \dot{x}, \ddot{x}).

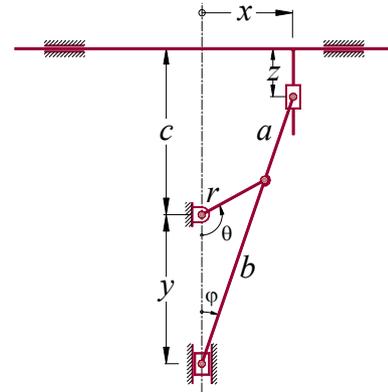


Figura 6.29-24 Plaina Limadora Modificada para o cálculo da aceleração do torpedo.

25. Na figura a seguir, nós temos a representação esquemática do sistema Biela Manivela para um motor em “V”. O ângulo α é constante e as duas bielas têm o mesmo comprimento, quando a entrada do movimento se fizer pelo pistão P_1 , determine a velocidade e aceleração da manivela e do pistão P_2 .

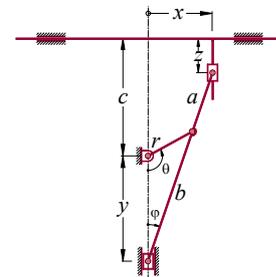


Figura 6.30-25 Esquema simplificado de um motor em “V”. A entrada do movimento, hora será pelo pistão P_1 e hora será pelo pistão P_2 .

26. Para o sistema de esterçamento veicular, mostrado abaixo, a cremalheira, representada pela barra “c”, recebe o movimento da barra de direção e portanto, são conhecidos o deslocamento e a velocidade para a variável “x”. Determine a razão entre as velocidades angulares das rodas quando do giro da direção, note que esta razão é a mesma entre os ângulos θ_1 e θ_2 .

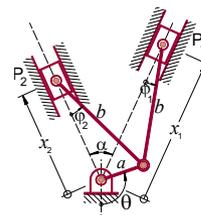


Figura 6.31-26 Esquema de barra de direção veicular para o esterçamento das rodas dianteiras.

27. O mecanismo mostrado, tem a barra “b” como principal. Para esta situação determine os coeficientes de velocidade e aceleração (k_x, l_x) do pistão horizontal.

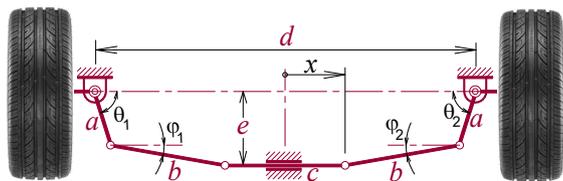


Figura 6.32-27 Montagem de um Biela Manivela múltiplo com seis barras.

28. Obtenha os valores solicitados no problema anterior, considerando agora que a entrada seja feita pela barra “a”. Verifique também se possível a solução do problema com a entrada feita pelo pistão horizontal.

29. No mecanismo dado, a entrada se faz pela coordenada “y”, onde conhecemos o deslocamento, velocidade e aceleração, desta forma obtenha as equações para o deslocamento, velocidade e aceleração para o pistão horizontal.

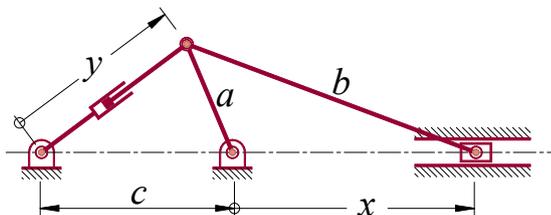


Figura 6.33-29 Mecanismo com atuador hidráulico na entrada do sistema.

30. Na cadeia, mostrada abaixo, a barra “d” é ternária, com os seus três elementos cinemáticos alinhados. Determine convenientemente a coordenada principal de tal forma que possamos obter analiticamente o coeficiente de velocidade e aceleração do pistão em “d” (k_y, l_y) determinando estes em seguida.

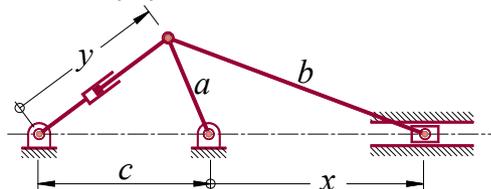


Figura 6.34-30 Mecanismo com seis barras, cálculo dos coeficientes de velocidade e aceleração para o pistão em “d”.

31. No mecanismo da figura o pistão horizontal é

fixo, sabendo que θ é a coordenada principal, determine os coeficientes de velocidade e aceleração (k_y, l_y) para o pistão livre.

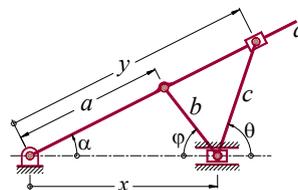


Figura 6.35-31 Mecanismo com seis barras, cálculo dos coeficientes de velocidade e aceleração para o pistão livre.

32. Para cadeia de seis barras, mostrada na figura, tem-se o seguinte sistema de coordenadas generalizadas ($\theta, \alpha, x, \beta, \delta$). Demonstre a expressão mostrada a seguir, sabendo-se que a barra “a” tem o mesmo comprimento da barra “c”.

$$\frac{k_\delta}{k_\alpha} = \frac{\text{sen}(\beta - \alpha)}{\text{sen}(\beta - \delta)} \tag{6.105}$$

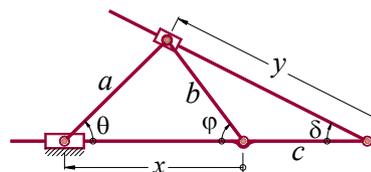


Figura 6.36-32 Junção quadrilátero articulado e biela manivela, relação entre os coeficientes de velocidade.

33. Na dupla Plaina Limadora mostrada, determine a velocidade relativa entre os pistões P_1 e P_2 , considerando que a entrada se faça pela barra “r”. Determine ainda o θ_0 que limita a aproximação ou afastamento dos pistões.

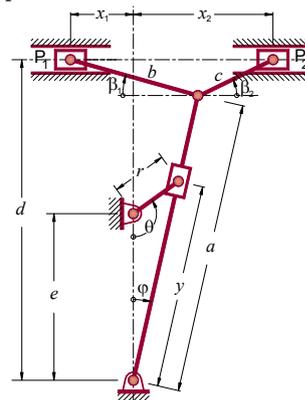


Figura 6.37-33 Dupla Plaina Limadora, cálculo da velocidade relativa entre os pistões.

34. No mecanismo de oito barras mostrado, a entrada se faz pela barra "d" e o sistema de coordenadas generalizadas é $(\theta, y, \alpha, \beta, \delta, \varphi, x)$, desta forma, determine os coeficientes de velocidade k_δ , para a barra "c" e k_x , para o pistão horizontal.

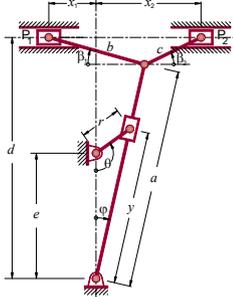


Figura 6.38-34 Coeficientes de velocidade em uma montagem de Quadrilátero Articulado com Biela Manivela.

35. No mecanismo anterior, obtenha o coeficiente de velocidade da barra "d", k_θ , considerando que a entrada se faça pelo pistão horizontal.

36. Na cadeia de oito barras a entrada se faz pela coordenada "x", acrescente, convenientemente, outras coordenadas e determine a relação de velocidades k_y/k_z .

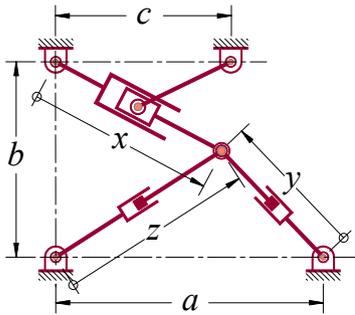


Figura 6.39-36 Mecanismos composto por três atuadores hidráulicos em sequência.

37. Na cadeia mostrada, a entrada se faz pela barra "a", determine o deslocamento e a velocidade angular para a barra "e" e também a velocidade angular da barra "d".

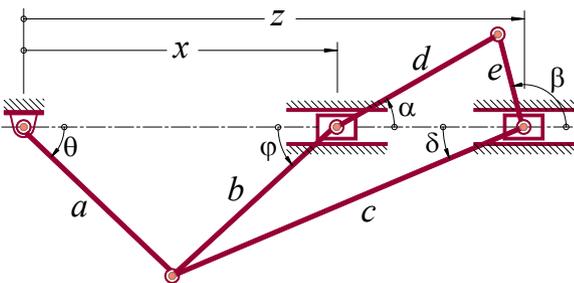


Figura 6.40-37 Coeficientes de velocidade para vários mecanismos Biela Manivela em sequência.

38. Na cadeia de dez barras mostrada, a entrada se faz pela coordenada θ e são conhecidos também $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$, a barra central, associada à coordenada θ , é ternária com três pares cinemáticos rotativos alinhados. Acrescente, convenientemente, mais coordenadas generalizadas e determine a relação k_x/k_y .

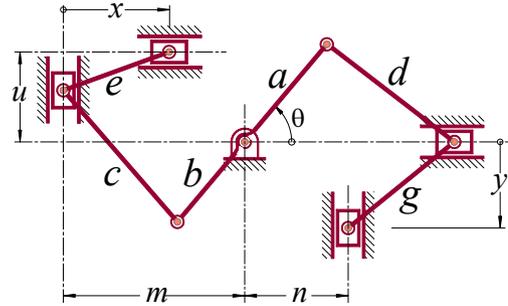


Figura 6.41-38 Cadeia imposta com dez barras, cálculo das relações de velocidades.

39. No problema anterior, ainda considerando que a entrada faça pela coordenada θ e conhecidos $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$, determine o coeficiente da aceleração l_x , para a coordenada x .

40. No mecanismo de dez barras, abaixo, determine as velocidades angulares das barras "p" e "q", sendo $(\theta, \varphi, y, \delta, x, \omega, \alpha, \mu, \beta)$ as coordenadas generalizadas e sabendo-se que a entrada se faz pela barra "a" e são conhecidos θ e $\dot{\theta}$.

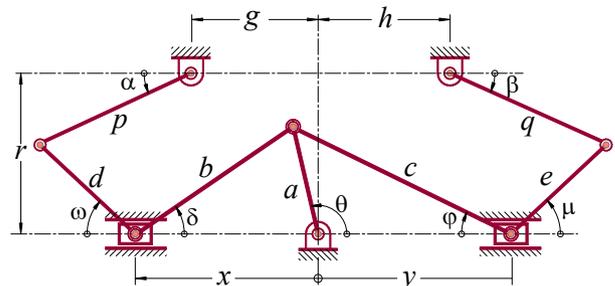


Figura 6.42-40 Cadeia imposta com dez barras, cálculo das velocidades de "p" e de "q".

41. No mecanismo de quatorze barras, abaixo, sendo a_1 a barra de entrada, determine as velocidades angulares das barras a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 .

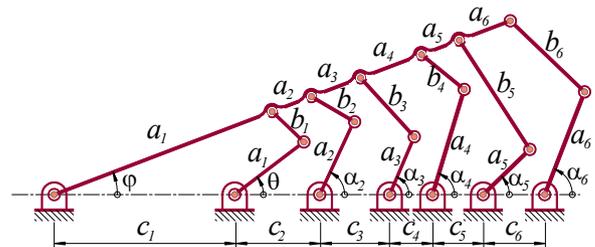


Figura 6.42-40 Cadeia imposta com quatorze barras, cálculo várias velocidades.

Referências Bibliográficas

D. B. MARGHITU – Kinematic chains and machine components design – Elsevier Academic Press, 2005.

R.L. NORTON – Design of machinery: an introduction to the synthesis and analysis of mechanisms and machines – McGraw-Hill, Fourth Edition 2007.

J. E. SHIGLEY, J.J. UICKER – Theory of Machines and Mechanisms – McGraw-Hill, Second Edition 1995.

J. E. SHIGLEY – Cinemática dos Mecanismos – Ed. Edgard Blücher, 1970.

S. DOUGHT – Mechanics of Machine – John Wiley & Sons Inc, 2001.

H. H. MABIE, F. W. OCVIRK – Mechanisms And Dynamics Of Machinery – John Wiley & Sons, Third Edition 1978.

C. S. SHARMA, K. PUROHIT – Theory of Mechanisms and Machines – Prentice-Hall, New Delhi, 2006.

Em Educação
Prof. José Maria