

3. Curvas de Elevação

Modernamente, a partir da necessidade de alta performance, dinâmica e cinemática, em máquinas industriais e na indústria automobilística em geral, a construção dos mecanismos do tipo came seguidor demanda alta tecnologia e, principalmente um alto nível de precisão matemática nas características das curvas de elevação, velocidade e aceleração. Devido ao fato de o seguidor ter movimento alternado, um cuidado maior se faz necessário nas expressões e diagramas da aceleração e do "jerk", de formas a evitar problemas dinâmicos no seguidor, tais como choques e vibrações e, nos sistemas em que a velocidade é mais elevada, isto se torna crítico. Desta forma, tanto "Norton" [3] quanto "Rothbart" [4] colocam em desuso, para os dias de hoje, curvas clássicas de elevação tais como a *parábola*, a *harmônica*, a *cúbica* e até mesmo a *cicloide* que no passado eram bastante utilizadas.

Também as novas tecnologias de medição, fabricação e análise permitem que hoje possamos desenvolver mecanismos mais eficientes de forma mais rápida e econômica. Em particular, no caso dos mecanismos de came, **figura 3**, a busca desta eficiência começa pelo desenvolvimento de novas curvas de elevação, cujos diagramas tenham sempre uma suavidade, principalmente nas curvas da aceleração e aceleração segunda, garantindo uma geometria no contorno do came que não propiciará choques ou vibrações ao seguidor.

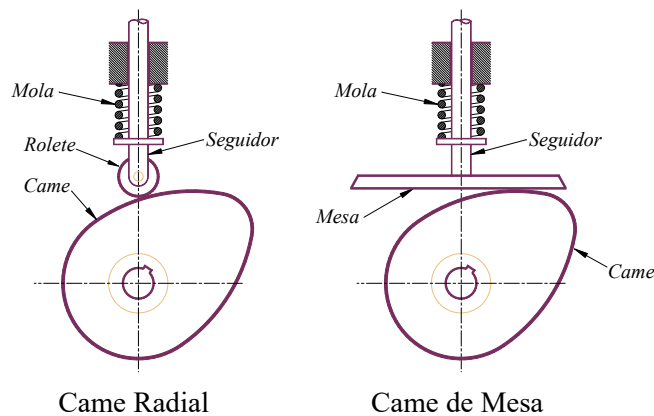


Figura 3 - Mecanismos de Came.

3.1 Diagramas e Normalização

No capítulo anterior, analisamos os possíveis diagramas de elevação normalmente utilizados em projetos de cames, sendo eles E-R, E-R-Rp, E-Rp-R e E-Rp-R-Rp, ficando o entendimento de que um diagrama compreendia um ciclo completo de giro do came, ou seja o came girando de zero a π . Portanto os diagramas sempre compreendem uma função de elevação e uma função de retorno, além de possíveis trechos de repouso. Neste capítulo iremos determinar as possíveis funções de elevação e retorno que podem ser intercaladas nos diagramas de elevação de tal forma que tenhamos um seguidor se deslocando com velocidades e acelerações de acordo com as normas que predizem o projeto de cames.

Uso de Funções Normalizadas

Normalmente, consideramos que um função está em seu estado natural quando ela é escrita na sua forma mais simplificada possível, queremos dizer sem coeficientes de multiplicação à função ou ao seu argumento e, neste caso não nos importamos com o seu domínio ou o contradomínio, podendo os mesmos serem livres ou arbitrados.

Vamos considerar que uma função está em seu estado normalizado quando ela, através de operações de expansão ou contração, nas direções horizontal e vertical, tiver o seu domínio em $[0, 1]$, bem como também o seu contradomínio em $[0, 1]$. Quando se trata de curvas de elevação, no intuito de se analisar choques ou perturbações no movimento do seguidor, decorrentes de imperfeições *matemáticas* no contorno do came, se faz necessária a análise de cada derivada da curva, não só graficamente, como também analiticamente observando o valor das funções em diversos pontos - somente a visualização gráfica não é suficiente - e esta tarefa fica bastante simplificada quando efetuada nas funções normalizadas, pelo fato de serem elas uma simplificação das funções originais que preservam tudo das mesmas, a sua verificação condiz exatamente com o que acontece de forma real, a menos de um fator de escala que não tem importância numa primeira análise.

Esta é uma nova forma de abordagem para obtenção, não só das curvas clássicas e seus estudos, como também de novas curvas, ou seja efetuamos todas as análises sobre a curva normalizada para só então, após a certeza de que é uma curva eficiente, se chegar à curva final através das operações de expansão horizontal e vertical vistas no Capítulo 1.

Através da função de elevação normalizada é que iremos montar as tabelas comparativas de desempenho das funções, no que diz respeito a velocidades, acelerações e aceleração segunda.

Desta forma, a análise das curvas e de suas derivadas será facilitada se trabalharmos com a função normalizada então obteremos, inicialmente, a função de elevação normalizada e suas derivadas, para só então calcular a função de elevação final pela expansão horizontal de β , seguida de expansão vertical de h , isto pode ser feito de forma bastante simplificada quando já dispomos da forma normalizada.

Com efeito, para se obter a função final, é o bastante que multipliquemos a função normalizada por h e dividamos o seu argumento por β .

Seja então $p(\theta)$ a função na forma normalizada e desejamos obter $f(\theta)$ na forma final, teríamos então:

$$f(\theta) = h \cdot p\left(\frac{\theta}{\beta}\right) \quad (1.1)$$

3.2 Relação Temporal Angular

Quando relatamos deslocamento do seguidor com conseqüente velocidade e aceleração, somos levados a concluir que a curva de elevação deveria ser um função do tempo e não do ângulo do came, como estamos tratando até então. Isto é correto, porém é mister notar que o ângulo de rotação do came é uma função do tempo e então de forma indireta isto já está sendo considerado, e a velocidade e aceleração real do seguidor pode ser obtida de forma direta utilizando-se a regra da cadeia para funções com o argumento dependente de outras variáveis. Vejamos como, nesta abordagem simples, colocando implicitamente a variável tempo, podemos trabalhar com a função de elevação:

$$y = f(\theta) \quad (2.1)$$

Com θ dependo do tempo, $\theta = q(t)$, então

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{df(\theta)}{dt} = \dot{\theta} \frac{df(\theta)}{d\theta} = f'(\theta)\dot{\theta}$$

Ou seja:

$$\dot{y} = f'(\theta)\dot{\theta} \quad (2.2)$$

Da mesma forma, derivando sucessivamente, vamos obter:

$$\ddot{y} = f''(\theta)\dot{\theta}^2 \quad (2.3)$$

$$\ddot{y} = f'''(\theta)\dot{\theta}^3 \quad (2.4)$$

Perceba que aqui \dot{y} , e \ddot{y} são a velocidade e aceleração reais do seguidor, tomados no tempo, ao passo que f' e f'' representam a velocidade e a aceleração do seguidor como função do deslocamento angular do came.

Cabe ainda observar que, no caso de mecanismos de came, neste curso, iremos considerar o came sempre com rotação uniforme, ou seja $\dot{\theta}$ sempre constante, conseqüentemente vamos ter $\ddot{\theta} = 0$, ou seja aceleração, do came, não do seguidor, sempre nula. E isto foi utilizado na determinação das expressões (2.3) e (2.4), quando fizemos uso da regra da derivada do produto de funções.

O exposto, nos deixa de forma cômoda para desenvolvermos toda a teoria e aplicação das curvas de elevação em função apenas de θ (aqui representando o deslocamento angular do came) e, quando necessitarmos de análise mais elaborada em função do tempo, utilizar as expressões obtidas acima.

3.3 Elevação e Retorno

Quando nos referimos à elevação ou ao retorno, ou especificamente curvas de elevação e

retorno, estamos nos referindo ao movimento do seguidor, ou seja, estas curvas estarão associadas ao movimento do seguidor e serão plotadas em um gráfico onde no eixo horizontal (eixo dos x) expressamos o ângulo de rotação do came e no eixo vertical (eixo y) expressamos o deslocamento do seguidor.

A primeira curva $f(\theta)$, que aqui chamaremos *curva de elevação*, representa o deslocamento do seguidor em sua forma ascendente. Sua primeira derivada $f'(\theta)$ diz respeito à velocidade do seguidor, sua segunda derivada $f''(\theta)$ vai prever a aceleração, ainda do seguidor, e a sua terceira derivada $f'''(\theta)$, que aqui chamaremos de aceleração segunda, nos fornece informações importantes sobre “perturbações” no seguidor.

Observe

No jargão dos mecanismos de came, alguns autores utilizam o termo JERK para descrever a aceleração segunda, porém o entendimento correto é que o jerk só ocorre nos pontos de descontinuidade desta curva.

Da mesma forma, utilizaremos, para retorno do seguidor, a curva $g(\theta)$ e as suas respectivas derivadas, como explanado acima, só que agora para o seguidor em movimento descendente.

Estudaremos, em detalhes, as curvas de elevação $f(\theta)$, porém as curvas de retorno $g(\theta)$, podem, e são, derivadas destas através das operações em funções que vimos no capítulo 1. No caso, para isto iremos utilizar uma reflexão vertical, seguida de um deslocamento horizontal positivo, ou seja, conhecida a função de elevação $f(\theta)$, a qual gostaríamos que nos servisse para retorno, podemos obter a partir desta, a função

$$g(\theta) = f(\beta - \theta) \quad (3.1)$$

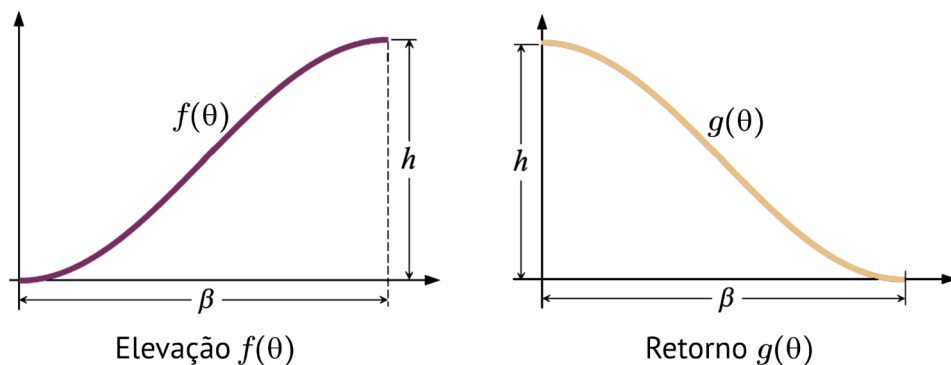


Figura 3.1 - Transformação da elevação em Retorno.

3.4 Lei Fundamental do Projeto de Cames (LFPC)

Excetuando-se as situações em que a rotação do came é muito baixa, nos projetos de cames mais elaborados, as seguintes premissas (LFPC) devem ser observadas: As funções de elevação e retorno devem ser contínuas em sua primeira e segunda derivadas durante todo o ciclo do came, devendo isto ocorrer, inclusive, nas transições para repouso, se houver. Isso leva ao seguinte corolário: A aceleração segunda (derivada direta da aceleração) deve ser finita durante todo o ciclo.

Como consequência, as funções que compõem o diagrama de elevação, também chamadas de funções discretas, devem ser contínuas até a terceira ordem. Em suma, as funções de deslocamento, velocidade e aceleração não podem ter descontinuidades em nenhum ponto.

Se existir qualquer descontinuidade na função da aceleração, significa que existirão infinitos picos, ou funções “delta Dirac”, na aceleração segunda.

3.4.1 Termos Básicos Utilizados (JERK E PERTURBAÇÃO)

Devemos ressaltar que estas restrições impostas, no projeto de cames, pela **LFPC** vão nos levar ao conceito de “jerk” e “perturbação” que discutiremos agora.

Antes cabe notar que o termo “jerk”, tal qual usado pelos autores estrangeiros, na teoria dos mecanismos de came, não tem uma tradução exata para a língua portuguesa, dentro do contexto. Em uma tradução ao pé da letra ficaríamos com “empurrão”, “arrancada”, “sacudidela”, etc.

Vamos aqui, neste curso, entender, o fenômeno do “jerk”, como um choque dinâmico decorrente da geometria do mecanismo, mais especificamente de pontos no contorno do came que ocasionam este evento e, dependendo da velocidade angular do came, este evento pode vir a fazer com que o sistema came seguidor venha a falhar por ruptura.

Dentro do contexto da **LFPC**, o fenômeno do “jerk” vem a ocorrer sempre que se tenha um ponto de descontinuidade na curva da aceleração, conseqüentemente a derivada da aceleração, nestes pontos, pelo fato do limite da função ser diferente quando tomado à esquerda ou à direita, terá infinitos picos, ou funções “delta Dirac” localizados no seu gráfico.

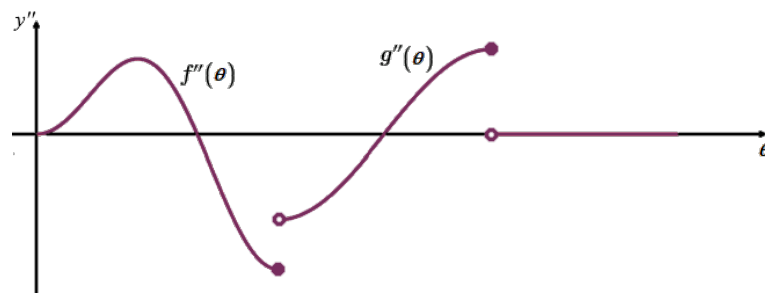


Figura 4.1 - Diagrama da aceleração com descontinuidades (jerk).

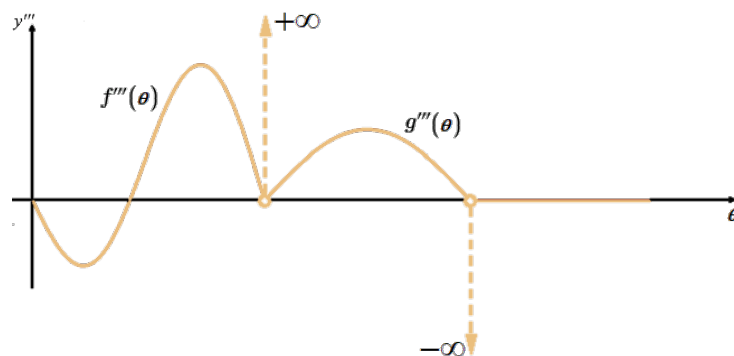


Figura 4.2 - Aceleração segunda com pontos indefinidos na função.

As **figuras 4.1** e **4.2** apresentam os diagramas da aceleração e aceleração segunda, respectivamente, para um dado movimento do seguidor, mostrando o fenômeno do “jerk” em dois pontos

Fique Ligado

Você não precisa traçar o gráfico ou analisar a “aceleração segunda” para verificar o fenômeno do *jerk*, para isto basta simplesmente verificar, no gráfico da aceleração, se há pontos de descontinuidade, verificando os valores da função, nos pontos críticos, à direita e à esquerda.

Já no fenômeno da “perturbação”, vamos entender como sendo uma variação muito rápida, não brusca o suficiente, na aceleração. Podemos detectar o fenômeno a partir do diagrama da aceleração segunda verificando neste, se há pontos de descontinuidade.

Observe

Pela descrição da **LFPC**, esta permite que haja *perturbação* nos diagramas do movimento do seguidor, porém não permite, de forma alguma, que haja *jerk*.

Consequências da LFPC nas Funções de Elevação

- Funções de elevação contínuas em sua primeira e segunda derivadas;
- Velocidade nula no início e final da elevação;
- Ausência de *jerk* em toda a curva.

Em razão disto, os gráficos, para funções de elevação, devem ter a forma básica mostrada na **figura 4.3** abaixo.

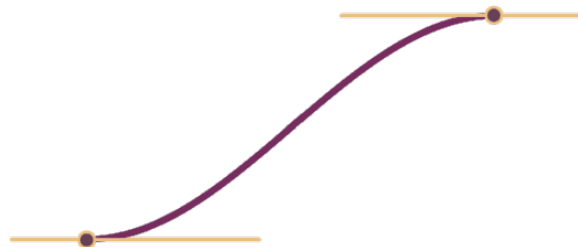


Figura 4.3 -Formato padrão de uma curva de elevação segundo a LFPC.

3.5 Curvas de Elevação Clássicas

Nos projetos de cames, em geral, a escolha das curvas a serem utilizadas na composição do diagrama, em um ciclo completo, dependem principalmente da velocidade angular do came, no sentido de prover acelerações baixas ou moderadas para o seguidor. A este respeito existem vários estudos na busca de curvas cada vez mais eficientes, com base em NURBS, splines, séries de Fourier e outras mais, no entanto, neste curso, como em tantos outros cursos de graduação, iremos nos restringir às curvas trigonométricas e polinomiais, não só pela sua simplicidade, como também por ser demasiado suficiente para uso na indústria, onde as velocidades são medianas. Logicamente, o aluno necessitando de curvas mais elaboradas, irá ter facilidade na busca de outras soluções a partir dos

princípios estudados neste capítulo.

Além de tomar como base os princípios da **LFPC**, as curvas de elevação deverão prever um ângulo de rotação do came, em que o seguidor vai de sua posição mais inferior à sua nova posição no topo da elevação, à esta altura deslocada, chamaremos h , altura de elevação, e para isto o came efetuou uma rotação angular de β , ângulo de elevação.

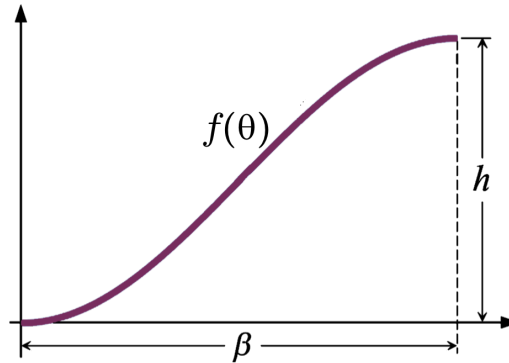


Figura 5.1 -Curva de elevação padrão.

Nas apresentações iniciais, das curvas de elevação, iremos considerar tanto β quanto h unitários e, perceba o aluno, isto vai nos permitir trabalhar com estas funções em sua forma normalizada, facilitando, como já mencionado, as análises de velocidade, aceleração e aceleração segunda. O processo de se obter a função real, ao final da análise, é bastante simples, necessitando somente que se multiplique a função normalizada por h e se divida o argumento por β .

3.6 Curvas Trigonométricas

As funções trigonométricas constituem a base das funções clássicas de elevação e, apesar de simples, são as mais utilizadas nos projetos de cames em geral, por conta de boas propriedades nas suas derivadas no que diz respeito a valores máximos comparativos, inclusive sendo a função harmônica tomada como parâmetro de comparação, não se tendo, até o presente momento, valores mais baixos em outras funções.

Dentro deste espectro iremos estudar as seguintes funções trigonométricas:

- Harmônica Simples** - Curva simples e elegante, com excelentes índices de aceleração, porém **não obedece à LFPC**, no entanto em composições, com ela mesma em π , ela supre este problema, sendo a melhor escolha para este tipo de composição.
- Cicloide** - Bons índices de aceleração e aceleração segunda, obedece totalmente à **LFPC** mas peca por não anular as perturbações nos extremos.
- Dupla Harmônica** - Bons índices e com excelente performance no início da elevação, padece pelo fato de não obedecer à **LFPC** ao final da elevação, porém elimina este fato quando composta com ela mesma em um ciclo E-R-Rp.
- Dupla Cicloide** - Boa performance nas derivadas, obedece totalmente à **LFPC** e não apresenta perturbação ao início ou final.

3.6.1 Harmônica Simples

Pelo exposto anteriormente, a **LFPC** nos informa que funções em forma de "S", com assíntota horizontal em seus extremos (derivada nula), **figura 4.3**, são fortes candidatas a curva de elevação. Tomemos então a função cosseno no intervalo $[0, \pi]$ que, como sabemos, tem derivada nula no princípio e final deste intervalo.

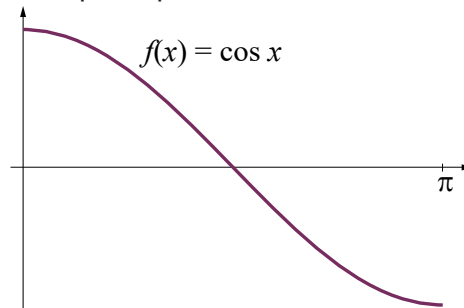


Figura 6.1.1 - Função cosseno original.

Funções de elevação, além de ter derivada nula nos extremos, iniciam-se na origem e são positivas em todo o seu domínio, nós vamos conseguir isto efetuando um espelhamento horizontal na função cosseno seguido de um deslocamento vertical unitário, obtendo a função $f(x) = 1 - \cos x$, como mostrado na **figura 6.1.2**, abaixo.

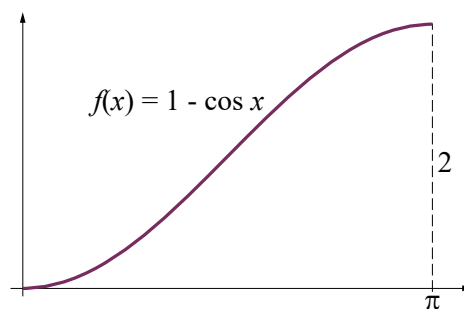


Figura 6.1.2 - Função cosseno transformada em curva de elevação.

Para o nosso estudo, só nos resta normalizá-la e, para isto vamos usar $1/2$ para fator de multiplicação da função e π para multiplicação do argumento, obtemos então:

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos \pi x) \quad (6.1.1)$$

Desta forma as derivadas sucessivas são imediatas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \pi x \\ f''(x) &= \frac{\pi^2}{2} \cos \pi x \\ f'''(x) &= -\frac{\pi^3}{2} \operatorname{sen} \pi x = \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

E então, os gráficos para deslocamentos e derivadas pode ser visto na **figura 6.1.3**, abaixo.

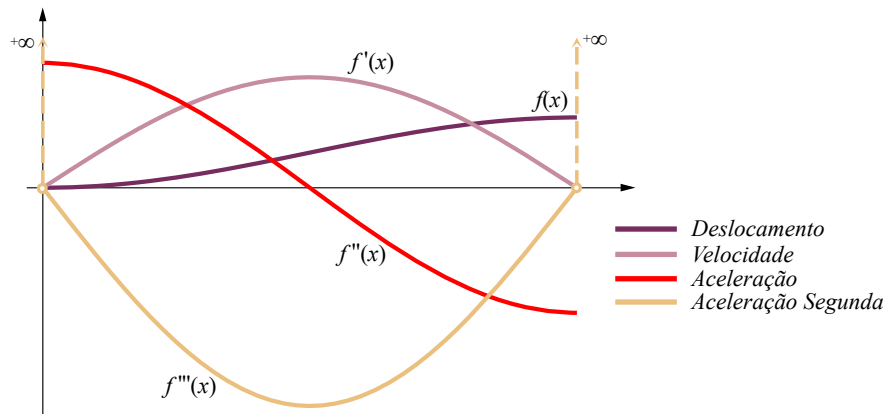


Figura 6.1.3 - Deslocamento, velocidade, aceleração e aceleração segunda para a harmônica.

Em nossa métrica de comparação, aqui, os valores máximos para velocidade, aceleração e *jerk*, são $\frac{\pi}{2} = 1,57$, $\frac{\pi^2}{2} = 4,93$ e $-\frac{\pi^3}{2} = -15,50$, respectivamente, mas o último valor é apenas uma referência, uma vez que a aceleração segunda foi para infinito nos extremos, inviabilizando o uso da função harmônica.

Observe que nestas análises estamos considerando que a função de elevação $f(x)$ será composta à esquerda com a função $p(x) = 0$ e à direita com a função $h(x) = 1$, ambas funções constantes. Exatamente por isto é que temos *jerk* nos extremos, **figura 6.1.3**. Em situações em que a função seja composta com outras funções pode ser possível a eliminação deste *jerk*, tanto no início quanto ao final.

Harmônica em Elevação h e Ângulo de elevação β

Como sabemos, a função real pode ser obtida da função normalizada, pela multiplicação desta por h juntamente com a divisão de seu argumento por β . Aplicando-se isto à equação (6.1.1), é imediata a sua obtenção.

$$f(\theta) = \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\beta} \theta \right) \quad (6.1.3)$$

3.6.2 Cicloide

Para a harmônica, utilizamos a função cosseno, vamos agora utilizar a função seno, porém ainda buscando funções em forma de "S", vemos que a função seno não tem como assumir esta forma a partir do seu início, no entanto, imaginemos a função senoidal conjugada com a função identidade de acordo com a expressão abaixo.

$$f(x) = x - \sin x \quad (6.2.1)$$

Note que temos derivada unitária nos dois extremos, para a função $h(x) = \sin x$, no intervalo $[0, 2\pi]$, e para a função $p(x) = x$, isto ocorre em todo o domínio, logo nos extremos esta conjugação vai demandar em derivada nula, e a função obtida é mostrada no gráfico da **figura 6.2.2**, em seguida.

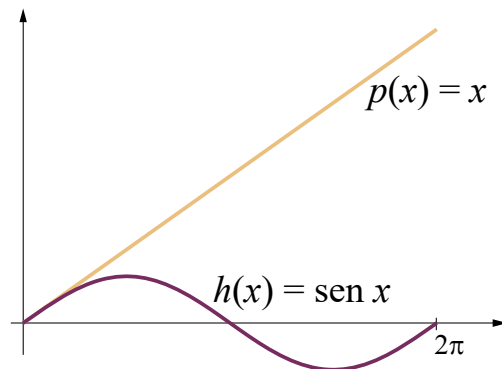


Figura 6.2.1 - Função identidade e função seno no intervalo $[0, 2\pi]$.

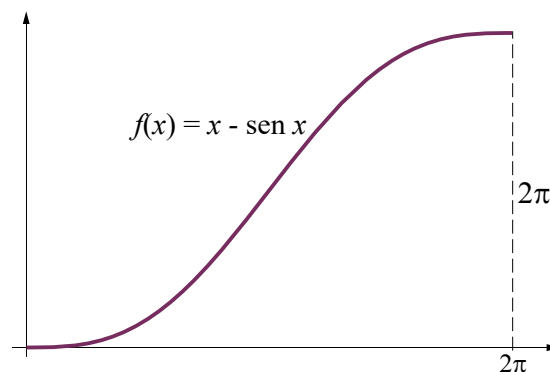


Figura 6.2.2 - Conjugação da função identidade com a função seno.

Com efeito, a função plotada na **figura 6.2.2** tem derivada nula nos extremos, inicia-se na origem e é positiva em todo o seu domínio. Para normalizar esta função, vamos usar $1/2\pi$ para fator de multiplicação da função e 2π para multiplicação do argumento, obtemos então, a seguinte expressão.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}(x - \text{sen } 2\pi x) \quad (6.2.2)$$

Simplificando ainda mais.

$$f(x) = x - \frac{1}{2\pi}\text{sen } 2\pi x \quad (6.2.3)$$

E as derivadas sucessivas podem ser obtidas.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \cos 2\pi x \\ f''(x) &= 2\pi \text{sen } 2\pi x \\ f'''(x) &= 4\pi^2 \cos 2\pi x \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

E, nos diagramas abaixo, **figura 6.2.3**, podemos ver que não houve *jerk*, apesar de haver descontinuidade nos extremos da aceleração segunda, caracterizando que haverá *perturbação* nestes pontos.

Agora, os valores máximos para velocidade, aceleração e aceleração segunda, são 2 , $2\pi = 6,283$ e $4\pi^2 = 39,478$, respectivamente, e aqui, o último valor é importantíssimo para uma comparação da aceleração segunda com outras curvas similares.

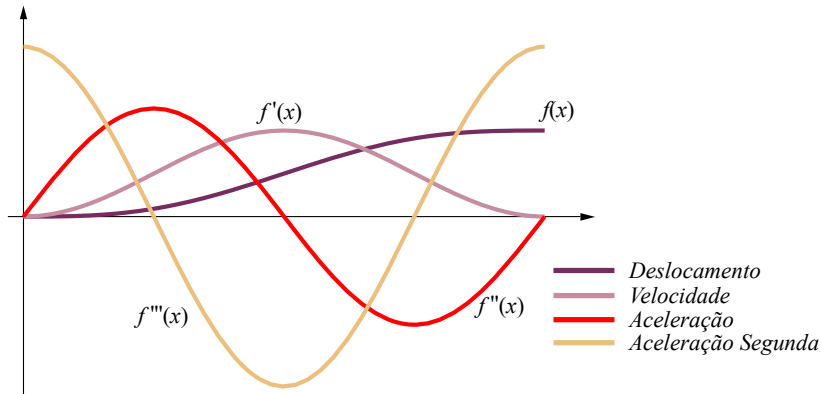


Figura 6.2.3 - Deslocamento, velocidade, aceleração e aceleração segunda para a cicloide.

Novamente, é importante notar que nestas análises estamos considerando que a função de elevação $f(x)$ será composta à esquerda com a função $p(x) = 0$ e à direita com a função $h(x) = 1$, ambas funções constantes. Exatamente por isto é que temos *perturbação* nos extremos. Em situações em que a função seja composta com outras funções pode ser possível a eliminação desta *perturbação*.

Cicloide em Elevação h e Ângulo de elevação β

Como sabemos, a função real pode ser obtida, da função normalizada, pela multiplicação desta por h juntamente com a divisão de seu argumento por β . Aplicando-se isto à equação (6.2.3), é imediata a sua obtenção.

$$f(\theta) = h\left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi} \text{sen} \frac{2\pi}{\beta} \theta\right) \tag{6.2.5}$$

3.6.3 Dupla Harmônica

Compondo, no intervalo $[0, \pi]$, a função $p(x) = 1 - \cos x$ com a função $h(x) = 1 - \cos 2x$ de forma a que tenhamos um quarto da última subtraindo da primeira, vamos ter:

$$f(x) = 1 - \cos x - \frac{1}{4}(1 - \cos 2x) \tag{6.3.1}$$

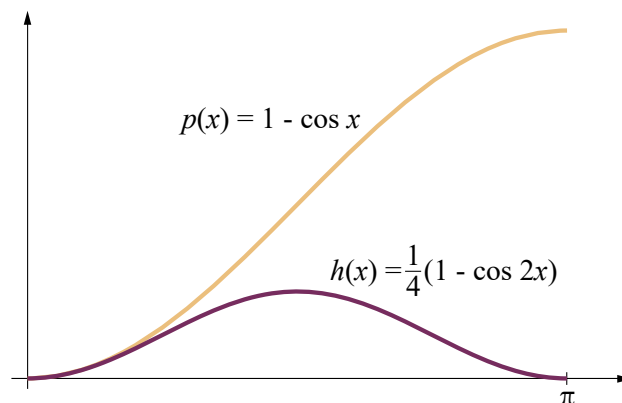


Figura 6.3.1 - Funções para composição no intervalo $[0, \pi]$.

Aqui, as derivadas nos extremos do intervalo $[0, \pi]$, já eram nulas, não afetando o

resultado final que também vai ter derivadas nulas nos dois extremos, a função obtida, desta subtração, é mostrada no gráfico da **figura 6.3.2**, abaixo.

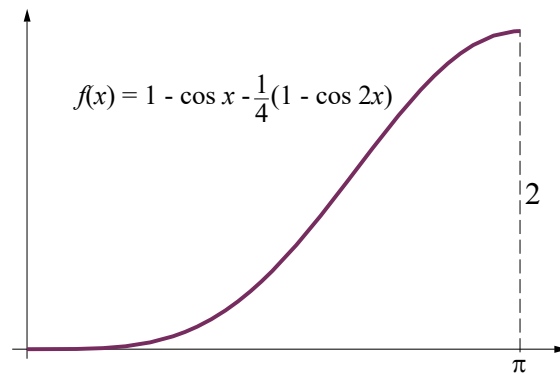


Figura 6.3.2 - Conjugação das funções a partir de uma subtração.

A normalização, como nos casos anteriores, vai usar $1/2$ para fator de multiplicação da função e π para multiplicação do argumento.

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[(1 - \cos \pi x) - \frac{1}{4}(1 - \cos 2\pi x) \right] \quad (6.3.2)$$

E as derivadas sucessivas podem ser obtidas.

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} (\sin \pi x - \frac{1}{2} \sin 2\pi x)$$

$$f''(x) = \frac{\pi^2}{2} (\cos \pi x - \cos 2\pi x) \quad (6.3.3)$$

$$f'''(x) = -\frac{\pi^3}{2} (\sin \pi x - 2 \sin 2\pi x)$$

E, nos diagramas abaixo, **figura 6.3.3**, podemos ver que não houve *jerk* no início da elevação, mas este ocorre ao seu final. Há de se enfatizar aqui que o ideal seria *jerk* nulo também ao final da elevação, mas isto não inviabiliza a importância desta curva, pois se compormos a elevação com a sua correspondente curva de retorno este *jerk* vai se anular nos casos em que o ângulo de elevação é igual ao ângulo de retorno, situação esta muito utilizada na prática.

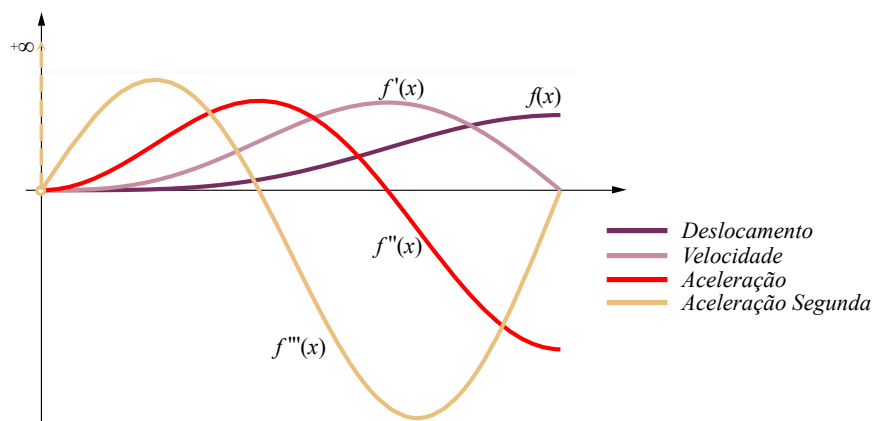


Figura 6.3.3 - Deslocamento, velocidade, aceleração e aceleração segunda para a dupla harmônica.

Agora, os valores máximos para velocidade, aceleração e aceleração segunda, são 2.041, $-\pi^2 = -9,87$ e $-42,414$, respectivamente, e como no último exemplo, o último valor é importantíssimo para uma comparação da aceleração segunda com outras curvas similares.

Lembre-se que nestas análises estamos considerando que a função de elevação $f(x)$ será composta à esquerda com a função $p(x) = 0$ e à direita com a função $h(x) = 1$, ambas funções constantes.

Dupla Harmônica em Elevação h e Ângulo de elevação β

Como sabemos, a função real pode ser obtida, da função normalizada, pela multiplicação desta por h juntamente com a divisão de seu argumento por β . Aplicando-se isto à equação (6.2.3), é imediata a sua obtenção da dupla harmônica com elevação em h e ângulo de elevação em β .

$$f(\theta) = \frac{h}{2} \left[\left(1 - \cos \frac{\pi}{\beta} \theta\right) - \frac{1}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\beta} \theta\right) \right] \quad (6.3.4)$$

3.6.4 Dupla Cicloide

Efetuada a composição da função $p(x) = x - \text{sen } x$, no intervalo $[0, 2\pi]$, com a função $h(x) = x - \frac{1}{2}\text{sen } 2x$ de forma a que tenhamos um quarto da última subtraindo da primeira, vamos ter:

$$f(x) = x - \text{sen } x - \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{2} \text{sen } 2x \right) \quad (6.4.1)$$

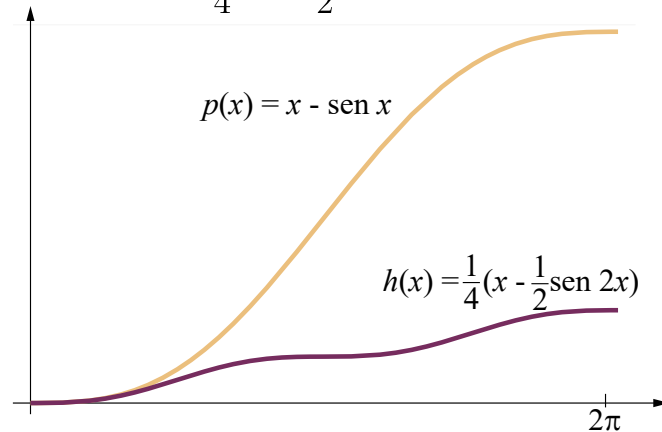


Figura 6.4.1 - Funções para composição no intervalo $[0, 2\pi]$.

Aqui, as derivadas nos extremos do intervalo $[0, 2\pi]$, já eram nulas, não afetando o resultado final que também vai ter derivadas nulas nos dois extremos, a função obtida, desta subtração, é mostrada no gráfico da **figura 6.4.2**, abaixo.

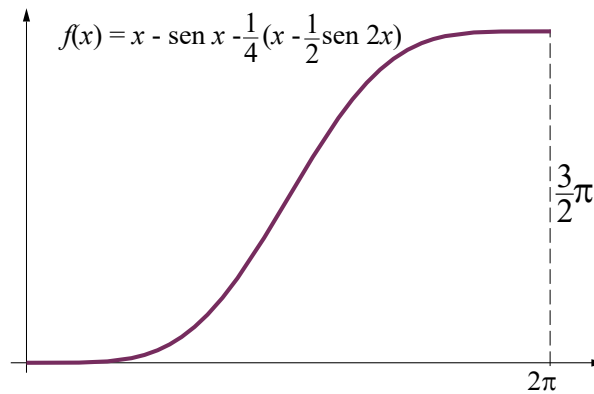


Figura 6.4.2 - Conjugação das funções a partir de uma subtração.

A normalização, como nos casos anteriores, vai usar $2/3\pi$ para fator de multiplicação da função e 2π para multiplicação do argumento.

$$f(x) = \frac{4}{3} \left[\left(x - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x \right) - \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{4\pi} \sin 4\pi x \right) \right] \quad (6.4.2)$$

E as derivadas sucessivas podem ser obtidas.

$$f'(x) = \frac{4}{3} \left[(1 - \cos 2\pi x) - \frac{1}{4} (1 - \cos 4\pi x) \right]$$

$$f''(x) = \frac{8\pi}{3} (\sin 2\pi x - \frac{1}{2} \sin 4\pi x) \quad (6.4.3)$$

$$f'''(x) = \frac{16\pi^2}{3} (\cos 2\pi x - \cos 4\pi x)$$

E, nos diagramas abaixo, **figura 6.4.3**, podemos ver que não houve *jerk* nos extremos e tão pouco perturbação nos extremos. Portanto, esta é uma das poucas curvas de elevação que podem ser utilizadas em diagramas do tipo **E-Rp-R-Rp** sem que haja *jerk* ou perturbação ao longo do seu percurso.

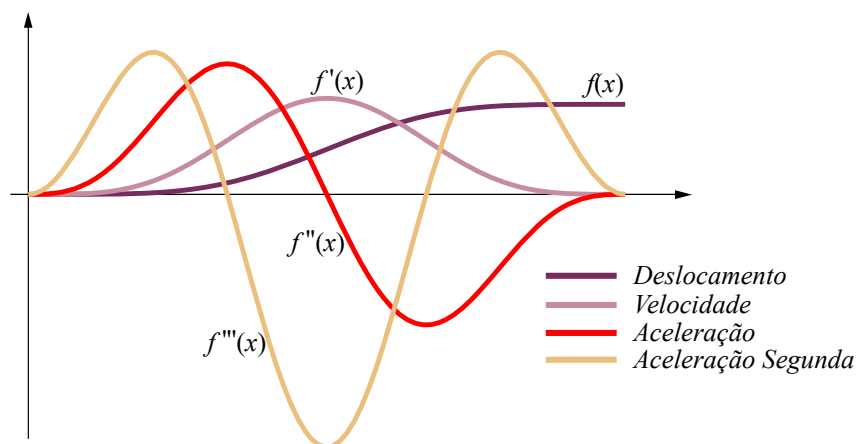


Figura 6.4.3 - Deslocamento, velocidade, aceleração e aceleração segunda para a dupla cicloide.

Agora, os valores máximos para velocidade, aceleração e aceleração segunda, são $8/3 = 2,67$, $2\pi\sqrt{3} = 10,89$ e $-32\pi^2/3 = -105,28$, respectivamente, e como no último exemplo, o último valor é importantíssimo para uma comparação da aceleração segunda com outras curvas similares.

Mais uma vez, atente que nestas análises estamos considerando que a função de elevação $f(x)$ será composta à esquerda com a função $p(x) = 0$ e à direita com a função $h(x) = 1$, ambas funções constantes. Mesmo assim não houve *jerk* ou *perturbação* nos extremos da função.

Dupla Cicloide em Elevação h e Ângulo de elevação β

Como sabemos, a função real pode ser obtida da função normalizada, pela multiplicação desta por h juntamente com a divisão de seu argumento por β . Aplicando-se isto à equação (6.4.2), é imediata a obtenção da dupla cicloide com elevação em h e ângulo de elevação em β .

$$f(\theta) = \frac{4h}{3} \left[\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\beta} \theta - \frac{1}{4} \left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{4\pi} \operatorname{sen} \frac{4\pi}{\beta} \theta \right) \right] \quad (6.4.4)$$

Exemplo 3.6.1

Verifique se a a função dada abaixo, no domínio $[0, \pi]$, pode ser utilizada para curva de elevação e, em caso positivo, faça a análise dos gráficos de aceleração e aceleração segunda, verifique ainda se esta obedece à Lei Fundamental do Projeto de Cames. Ao final, monte, a partir dela, a função real com um ângulo de elevação β e uma altura h .

$$f(x) = 2 - 2 \cos x - \operatorname{sen}^2 x$$

Solução

1. Verificação:

- a. Função nula no início da elevação?

$$f(0) = 2 - 2 = 0 \quad \Leftarrow \quad OK$$

- b. Velocidades nulas para o início e final da velocidade?

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$f'(0) = 0 - 0 = 0 \quad \Leftarrow \quad OK$$

$$f'(\pi) = 0 - 0 = 0 \quad \Leftarrow \quad OK$$

- c. Verificação de ausência de máximo local na função de elevação.

$$f'(x) = 2(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x = 0$$

Ou seja:

$$1 - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 1$$

Então,

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pi$$

Confirmando então que não temos nenhum máximo local, como deve ser para uma função de elevação.

Desta forma, os itens a , b e c confirmam que a função se presta a ser utilizada como curva de elevação.

2. Verificação à LFPC

Verificando o valor da aceleração nos extremos, vamos ter:

$$f''(x) = 2 \cos x - 2(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

Logo:

$$f''(0) = 2(1) - 2(1+0) = 0 \quad \Leftarrow \quad OK$$

$$f''(\pi) = 2(-1) - 2(1) = -4 \quad \Leftarrow \quad FALHA$$

Verifica-se então, pela última equação que vai haver salto na aceleração, quando esta função for composta com outra função do tipo $f(x) = 4$ (repouso do seguidor), portanto existe *jerk* neste ponto, fazendo com que esta função não obedeça à LFPC.

3. Função em h e β .

Temos aqui uma expansão vertical de π para β e uma expansão vertical de 4 para h , então a expressão final será:

$$f(\theta) = \frac{h}{4} \left(2 - 2 \cos \frac{\pi}{\beta} \theta - \sin^2 \frac{\pi}{\beta} \theta \right)$$

3.7 Curvas Polinomiais

Também, como funções de elevação, podemos utilizar expressões polinomiais do tipo $u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots + a_nx^n$, notando que, para que a curva polinomial obedeça à **LFPC**, o primeiro coeficiente não nulo vai corresponder à potência 3, ou seja, devemos ter necessariamente $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$. Também vamos perceber que polinômios cuja última potência esteja acima de 7, apesar de serem viáveis, vão demandar em valores máximos de aceleração e aceleração segunda muito elevados, inviabilizando-as para uso em projetos reais.

A obtenção de determinada curva polinomial pode ser feita inicialmente a partir da normalização do polinômio procurado, considerando que, como condições de contorno, este tem que ter valor unitário no seu extremo direito, valor do polinômio em 1, e valor nulo para todas as derivadas subsequentes, assim:

- $f(1) = 1$
- $f'(1) = 0$
- $f''(1) = 0$
- $f'''(1) = 0$

Assim podemos garantir a ausência de *jerk*, ou *perturbação*, no final da elevação, uma vez que isto já está garantido quando o polinômio se inicia na potência 3 (ausência de *jerk*)

ou quando este se inicia na potência 4 (ausência de *perturbação*).

Aqui, nós iremos designar os polinômios pelas suas potências sequencialmente, na forma **A-B**, **A-B-C**, **A-B-C-D** e assim por diante. Assim, o polinômio $u(x) = 10x^3 - 15x^4 + 6x^5$, seria designado por **3-4-5** e, como veremos mais adiante os seus coeficientes serão únicos.

Com base nesta nomenclatura, para os polinômios, iremos estudar, dentro de cada categoria, polinômios começando em 3 e 4 apenas, visto que polinômios começando em 5 ou 6 têm características de aceleração e desaceleração segunda muito elevadas, tornando-se inviáveis.

Independente da classe a que pertença, toda a família de polinômios aqui estudados, não irão apresentar jerk em seu início, e apresentarão perturbação em seu início, apenas os que se iniciarem na potência 3.

A tabela a seguir ilustra este nosso estudo.

- Polinômio A-B** - Esta família, apesar de ter uma curva suave em seu início, principalmente os que começam na potência 4, padecem por **não obedecer à LFPC ao seu final**.
- Polinômio A-B-C** - Obedecem totalmente à **LFPC**, porém não há como conseguir ausência de perturbação ao seu final.
- Polinômio A-B-C-D** - Obedecem totalmente à **LFPC**, e sim, é possível se obter polinômios que não demandem perturbação em suas extremidades a partir da potência 4 se iniciando.

3.7.1 Polinômios do Tipo A-B

Aqui, nós iremos procurar funções polinomiais que se prestem às curvas de elevação começando com polinômios do tipo $u(x) = Ax^a + Bx^b$ e, considerando o polinômio normalizado.

Aplicando as condições de contorno, citadas acima, teremos

$$\begin{aligned} f(1) &= A + B = 1 \\ f'(1) &= aA + bB = 0 \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

Facilitando o desenvolvimento, o sistema de equações lineares (7.1.1) acima pode ser colocado em sua forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.1.2)$$

Cuja solução será:

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \frac{1}{b-a} \begin{bmatrix} b & -1 \\ -a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.1.3)$$

Percebendo que $b = a + 1$, conseqüentemente $b - a = 1$, vem:

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -1 \\ -a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b \\ -a \end{Bmatrix} \quad (7.1.4)$$

Desta forma, uma curva de elevação do tipo $Ax^a + Bx^b$, quando normalizada, terá a forma:

$$f(x) = bx^a - ax^b \quad (7.1.5)$$

3.7.1.1 Polinômio 3-4

Pela equação (7.1.5), desenvolvida acima, este polinômio, em sua forma normalizada, pode ser escrito como:

$$f(x) = 4x^3 - 3x^4 \quad (7.1.1.1)$$

Com as seguintes derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12(x^2 - x^3) \\ f''(x) &= 12(2x - 3x^2) \\ f'''(x) &= 24(1 - 3x) \end{aligned} \quad (7.1.1.2)$$

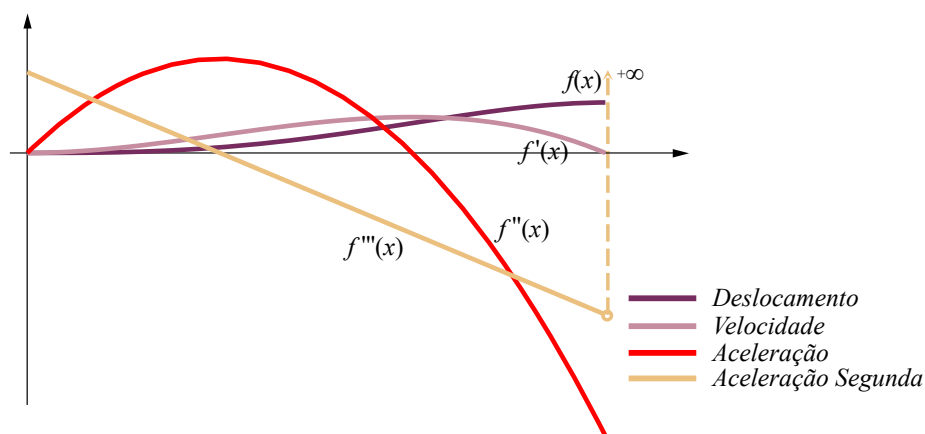


Figura 7.1.1.1 - Deslocamento, velocidade, aceleração e aceleração segunda para o polinômio 3-4.

Polinômio 3-4 em Elevação h e Ângulo de elevação β

Como sempre, a função real pode ser obtida da função normalizada, pela multiplicação desta por h , juntamente com a divisão de seu argumento por β . Aplicando-se isto à equação (7.1.1.1), obtemos o polinômio 3-4 real, com elevação em h e ângulo de elevação em β .

$$f(\theta) = h \left[4 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 - 3 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 \right] \quad (7.1.1.3)$$

3.7.1.2 Polinômio 4-5

Pela equação (7.1.5), desenvolvida acima, este polinômio, em sua forma normalizada, pode ser escrito como:

$$f(x) = 5x^4 - 4x^5 \quad (7.1.2.1)$$

Com as seguintes derivadas:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 20(x^3 - x^4) \\
 f''(x) &= 20(3x^2 - 4x^3) \\
 f'''(x) &= 120(x - 2x^2)
 \end{aligned}
 \tag{7.1.2.2}$$

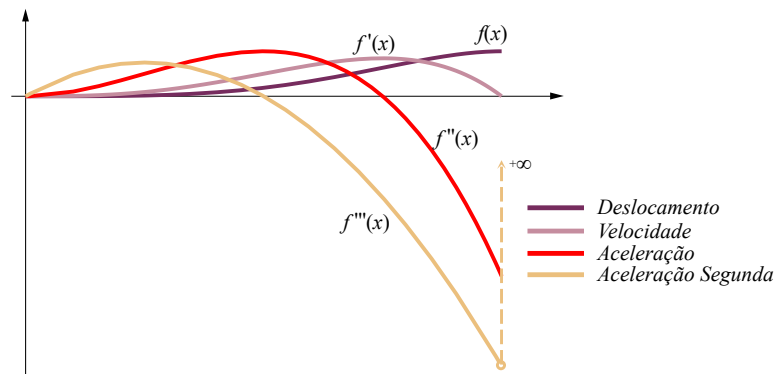


Figura 7.1.2.1 - Deslocamento, velocidade, aceleração e aceleração segunda para o polinômio 4-5.

Polinômio 4-5 em Elevação h e Ângulo de elevação β

Como sempre, a função real pode ser obtida, da função normalizada, pela multiplicação desta por h juntamente com a divisão de seu argumento por β . Aplicando-se isto à equação (7.1.2.1), obtemos o polinômio 3-4 real, com elevação em h e ângulo de elevação em β .

$$f(\theta) = h \left[5 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 - 4 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^5 \right]
 \tag{7.1.2.3}$$

3.7.2 Polinômios do Tipo A-B-C

Agora, vamos procurar curvas de elevação em polinômios do tipo $f(x) = Ax^a + Bx^b + Cx^c$, como indicado anteriormente, vamos considerar este polinômio normalizado e aplicar as condições de contorno indicadas, assim vamos obter

$$\begin{aligned}
 f(1) &= A + B + C = 1 \\
 f'(1) &= aA + bB + cC = 0 \\
 f''(1) &= a(a-1)A + b(b-1)B + c(c-1)C = 0
 \end{aligned}
 \tag{7.2.1}$$

O sistema de equações lineares (7.2.1) acima pode ser colocado em sua forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a(a-1) & b(b-1) & c(c-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \tag{7.2.2}$$

Pela equação acima é fácil perceber que a solução será a primeira coluna da matriz inversa, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{bc}{(c-a)(b-a)} \\ \frac{ac}{(a-b)(b-c)} \\ \frac{ab}{(c-a)(c-b)} \end{Bmatrix} \quad (7.2.3)$$

Lembrando que $b - a = 1$, $c - b = 1$ e $c - a = 2$, na equação acima, vamos obter finalmente:

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{bc}{2} \\ -ac \\ \frac{ab}{2} \end{Bmatrix} \quad (7.2.4)$$

Desta forma, uma curva de elevação do tipo $Ax^a + Bx^b + Cx^c$, quando normalizada, terá a forma:

$$f(x) = \frac{bc}{2}x^a - acx^b + \frac{ab}{2}x^c \quad (7.2.5)$$

3.7.2.1 Polinômio 3-4-5

Pela equação (7.2.5), desenvolvida acima, este polinômio, em sua forma normalizada, pode ser escrito como:

$$f(x) = 10x^3 - 15x^4 + 6x^5 \quad (7.2.1.1)$$

Com as seguintes derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 30(x^2 - 2x^3 + x^4) \\ f''(x) &= 60(x - 3x^2 + 2x^3) \\ f'''(x) &= 60(1 - 6x + 6x^2) \end{aligned} \quad (7.2.1.2)$$

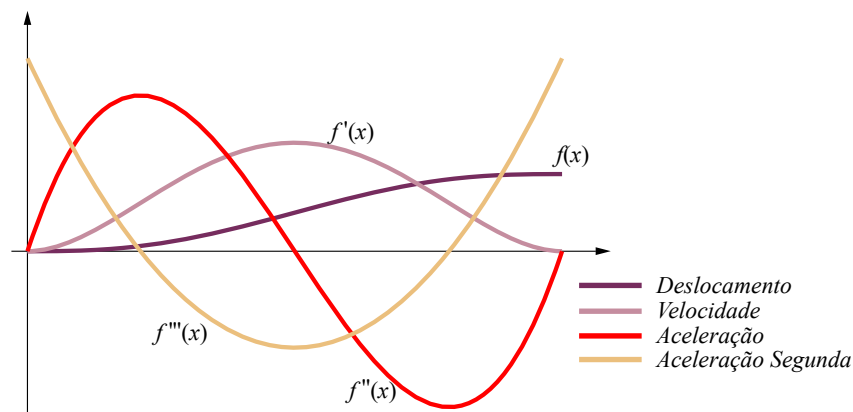


Figura 7.2.1.1 - Deslocamento, velocidade, aceleração e aceleração segunda para o polinômio 3-4-5.

Polinômio 3-4-5 em Elevação h e Ângulo de elevação β

Como sempre, a função real pode ser obtida da função normalizada, pela multiplicação desta por h juntamente com a divisão de seu argumento por β . Aplicando-se isto à equação (7.2.1.1), obtemos o polinômio 3-4 real, com elevação em h e ângulo de elevação em β .

$$f(\theta) = h \left[10 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 - 15 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 + 6 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^5 \right] \quad (7.2.1.3)$$

3.7.2.2 Polinômio 4-5-6

Pela equação (7.1.5), desenvolvida acima, este polinômio, em sua forma normalizada, pode ser escrito como:

$$f(x) = 15x^4 - 24x^5 + 10x^6 \quad (7.2.2.1)$$

Com as seguintes derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 60(x^3 - 2x^4 + x^5) \\ f''(x) &= 60(3x^2 - 8x^3 + 5x^4) \\ f'''(x) &= 120(3x - 12x^2 + 10x^3) \end{aligned} \quad (7.2.2.2)$$

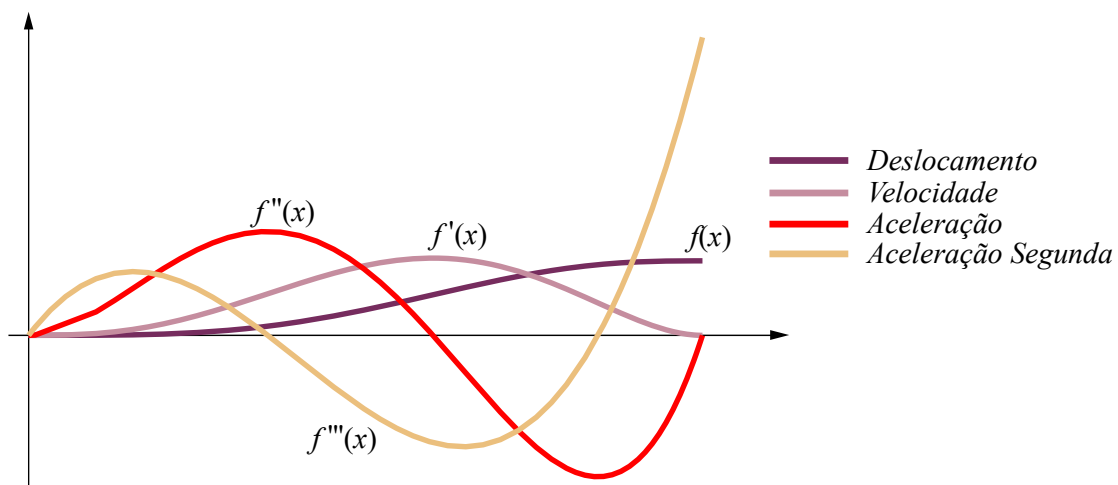


Figura 7.2.2.1 - Deslocamento, velocidade, aceleração e aceleração segunda para o polinômio 4-5-6.

Polinômio 4-5-6 em Elevação h e Ângulo de elevação β

Como sempre, a função real pode ser obtida da função normalizada, pela multiplicação desta por h , juntamente com a divisão de seu argumento por β . Aplicando-se isto à equação (7.2.2.1), obtemos o polinômio 4-5-6 real, com elevação em h e ângulo de elevação em β .

$$f(\theta) = h \left[15 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 - 24 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^5 + 10 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^6 \right] \quad (7.2.2.3)$$

3.7.3 Polinômios do Tipo A-B-C-D

Seguindo a ideia anterior, aqui vamos procurar curvas de elevação em polinômios do tipo $f(x) = Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d$. Vamos considerar este polinômio normalizado e aplicar as condições de contorno indicadas, assim vamos obter:

$$\begin{aligned} f(1) &= A + B + C + D = 1 \\ f'(1) &= aA + bB + cC + dD = 0 \\ f''(1) &= a(a-1)A + b(b-1)B + c(c-1)C + d(d-1)D = 0 \\ f'''(1) &= a(a-1)(a-2)A + b(b-1)(b-2)B + c(c-1)(c-2)C + d(d-1)(d-2)D = 0 \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

O sistema de equações lineares (7.3.1) acima pode ser colocado em sua forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a(a-1) & b(b-1) & c(c-1) & d(d-1) \\ a(a-1)(a-2) & b(b-1)(b-2) & c(c-1)(c-2) & d(d-1)(d-2) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.3.2)$$

Agora, notando que o determinante da matriz principal é constante e pode ser facilmente determinado.

$$\det(\mathbf{M}) = (b-a) \cdot (c-b) \cdot (c-a) \cdot (d-c) \cdot (d-b) \cdot (d-a) = 12 \quad (7.3.3)$$

O valor 12, na equação (7.3.3) é imediato, lembrando que $b-a=1$, $c-b=1$, $c-a=2$, $d-c=1$, $d-b=2$, $d-a=3$.

Determinando os cofatores da primeira linha, temos:

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= \det \left(\begin{bmatrix} b & c & d \\ b(b-1) & c(c-1) & d(d-1) \\ b(b-1)(b-2) & c(c-1)(c-2) & d(d-1)(d-2) \end{bmatrix} \right) = (c-b) \cdot (d-c) \cdot (d-b) \cdot bcd = 2bcd \\ c_{1,2} &= -\det \left(\begin{bmatrix} a & c & d \\ a(a-1) & c(c-1) & d(d-1) \\ a(a-1)(a-2) & c(c-1)(c-2) & d(d-1)(d-2) \end{bmatrix} \right) = -(c-a) \cdot (d-c) \cdot (d-a) \cdot acd = -6acd \\ c_{1,3} &= \det \left(\begin{bmatrix} a & b & d \\ a(a-1) & b(b-1) & d(d-1) \\ a(a-1)(a-2) & b(b-1)(b-2) & d(d-1)(d-2) \end{bmatrix} \right) = (b-a) \cdot (d-b) \cdot (d-a) \cdot abd = 6abd \\ c_{1,4} &= -\det \left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ a(a-1) & b(b-1) & c(c-1) \\ a(a-1)(a-2) & b(b-1)(b-2) & c(c-1)(c-2) \end{bmatrix} \right) = -(b-a) \cdot (c-b) \cdot (c-a) \cdot abc = -2abc \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

Sendo então a nossa matriz dos cofatores do tipo:

$$\begin{bmatrix} 2bcd & -6acd & 6abd & -2abc \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (7.3.5)$$

Então, a adjunta será:

$$\begin{bmatrix} 2bcd & \cdots & \cdots & \cdots \\ -6acd & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6abd & \cdots & \cdots & \cdots \\ -2abc & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \quad (7.3.6)$$

Tendo-se a adjunta, obtemos a inversa, multiplicando o inverso do determinante da matriz **M** pela adjunta, logo a inversa será:

$$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2bcd & \cdots & \cdots & \cdots \\ -6acd & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6abd & \cdots & \cdots & \cdots \\ -2abc & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{bcd}{6} & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{acd}{2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{abd}{2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{abc}{6} & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \quad (7.3.7)$$

Pela equação (7.3.2) é fácil perceber que a solução será a primeira coluna da matriz inversa, sendo assim, vamos ter:

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{bcd}{6} \\ -\frac{acd}{2} \\ \frac{abd}{2} \\ -\frac{abc}{6} \end{Bmatrix} \quad (7.3.8)$$

Desta forma, uma curva de elevação, polinomial, do tipo $Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d$ quando normalizada, terá a forma:

$$f(x) = \frac{bcd}{6}x^a - \frac{acd}{2}x^b + \frac{abd}{2}x^c - \frac{abc}{6}x^d \quad (7.3.9)$$

3.7.3.1 Polinômio 3-4-5-6

Pela equação (7.3.9), desenvolvida acima, este polinômio, em sua forma normalizada, pode ser escrito como:

$$f(x) = 20x^3 - 45x^4 + 36x^5 - 10x^6 \quad (7.3.1.1)$$

Com as seguintes derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 60(x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5) \\ f''(x) &= 60(2x - 9x^2 + 12x^3 - 5x^4) \\ f'''(x) &= 120(1 - 9x + 18x^2 - 10x^3) \end{aligned} \quad (7.3.1.2)$$

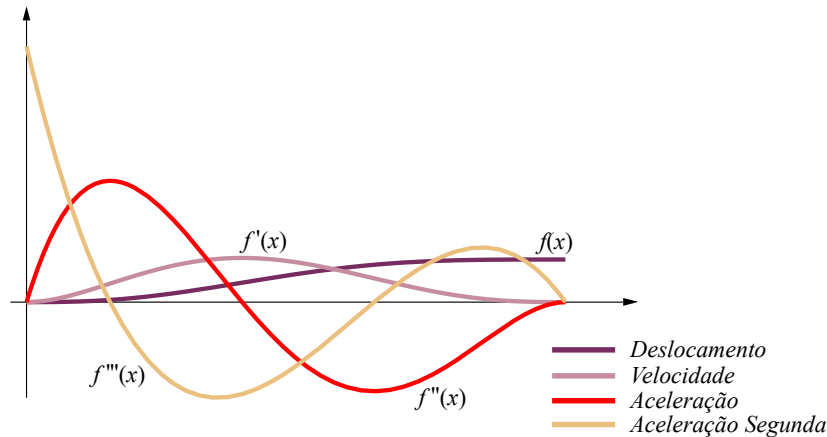


Figura 7.3.1.1 - Deslocamento, velocidade, aceleração e aceleração segunda para o polinômio 3-4-5-6.

Polinômio 3-4-5-6 em Elevação h e Ângulo de elevação β

Como sempre, a função real pode ser obtida da função normalizada, pela multiplicação desta por h , juntamente com a divisão de seu argumento por β . Aplicando-se isto à equação (7.3.1.1), obtemos o polinômio 3-4-5-6 real, com elevação em h e ângulo de elevação em β .

$$f(\theta) = h \left[20 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 - 45 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 + 36 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^5 - 10 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^6 \right] \quad (7.3.1.3)$$

Apesar de apresentar curvas excepcionais, no que diz respeito aos picos nas suas derivadas, esta curva padece por ter perturbação em seu início e isto não se tem como se evitar nem mesmo em composições, capítulo seguinte, pelo fato de a aceleração segunda se reflexionar na horizontal quando da obtenção da curva de retorno.

Vejamos o polinômio seguinte que também irá apresentar bons picos e não apresenta nenhum tipo de perturbação em seus extremos.

3.7.3.2 Polinômio 4-5-6-7

Pela equação (7.3.9), desenvolvida acima, este polinômio, em sua forma normalizada, pode ser escrito como:

$$f(x) = 35x^4 - 84x^5 + 70x^6 - 20x^7 \quad (7.3.2.1)$$

Com as seguintes derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 140(x^3 - 3x^4 + 3x^5 - x^6) \\ f''(x) &= 420(x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 2x^5) \\ f'''(x) &= 840(x - 6x^2 + 10x^3 - 5x^4) \end{aligned} \quad (7.3.2.2)$$

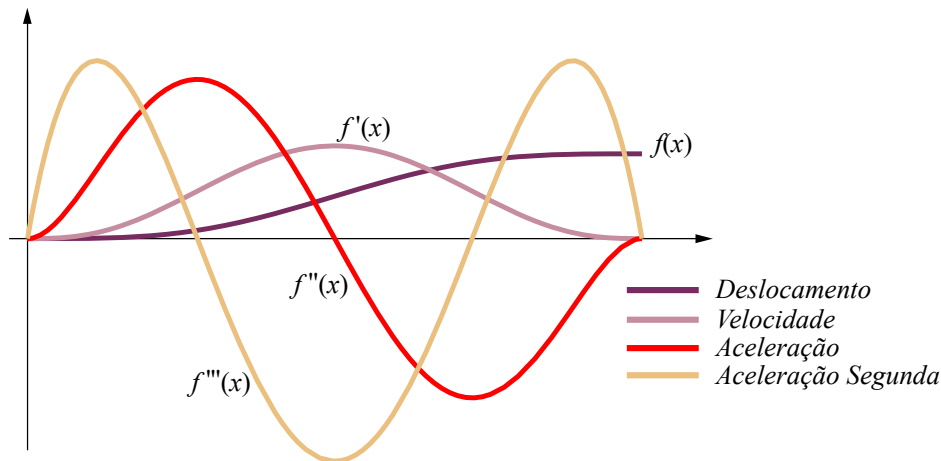


Figura 7.3.2.1 - Deslocamento, velocidade, aceleração e aceleração segunda para o polinômio 4-5-6-7.

Polinômio 4-5-6-7 em Elevação h e Ângulo de elevação β

Como sempre, a função real pode ser obtida da função normalizada, pela multiplicação desta por h , juntamente com a divisão de seu argumento por β . Aplicando-se isto à equação (7.3.2.1), obtemos o polinômio 4-5-6-7 real, com elevação em h e ângulo de elevação em β .

$$f(\theta) = h \left[35 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 - 84 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^5 + 70 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^6 - 20 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^7 \right] \quad (7.3.2.3)$$

A exemplo da “dupla cicloide”, estudada neste capítulo, vemos que o polinômio **4-5-6-7** não apresenta problemas de *jerk* e tão pouco de *perturbação* em seus extremos e, isto veremos no capítulo posterior, em termos de comparação, demanda uma performance bem acima da “dupla cicloide” no que diz respeito aos picos de velocidade, aceleração e “aceleração segunda”, sendo, portanto uma das curvas preferenciais para utilização em composições do tipo **E-Rp-R-Rp**.

Exemplo 3.7.1

Mostre que, para polinômios do tipo A-B, o pico de aceleração máxima ocorre em $-ab$ e, como consequência, valores da potência a maiores que 4 não são interessantes pois não acrescentam nada, uma vez que elevam a magnitude dos picos de aceleração.

Solução

1. Máxima aceleração

Curvas polinomiais do tipo A-B têm, para deslocamento a expressão

$$f(x) = bx^a - ax^b$$

Consequentemente

$$f'(x) = ab(x^{a-1} - x^{b-1})$$

$$f''(x) = ab((a-1)x^{a-2} - (b-1)x^{b-2})$$

Como, para polinômios do tipo A-B, o máximo da aceleração, que é negativo, ocorre no seu extremo, ao final da elevação, teremos

$$f''(1) = ab((a-1) - (b-1)) = ab(a - b)$$

Lembrando que $b - a = 1$, vem

$$f''(1) = -ab(b - a)$$

$$f''(1) = -ab \quad (cqd)$$

2. Potências Maiores que 4

Vejam os:

$$\text{Potência inicial} = 4 \Rightarrow f''(1) = -4 \times 5 = -20$$

$$\text{Potência inicial} = 5 \Rightarrow f''(1) = -5 \times 6 = -30$$

De certa forma vemos que

Potência inicial = $a \Rightarrow f''(1) = -a \times (a+1)$, e vemos que este valor crescerá, em magnitude, quando a crescer.

Portanto, a consequência imediata é que valores da potência inicial maiores que 4 não são interessantes para compor curvas de elevação do tipo A-B.

Exemplo 3.7.2

Dado o polinômio $f(x) = Ax^4 + Bx^5 + Cx^7$, verifique quais valores de A , B e C irão permitir que este polinômio possa ser utilizado como curva de elevação segundo a LFPC. Verifique se traz alguma vantagem em relação ao polinômio 4-5-6.

Solução

1. Determinação dos Coeficientes

Para velocidade e aceleração, teremos

$$f'(x) = 4Ax^3 + 5Bx^4 + 7Cx^6$$

$$f''(x) = 12Ax^2 + 20Bx^3 + 42Cx^5$$

Logo, para que a LFPC seja obedecida, devemos ter

$$f(1) = A + B + C = 1$$

$$f'(1) = 4A + 5B + 7C = 0$$

$$f''(1) = 12A + 20B + 42C = 0$$

Este sistema, linear de equações simples, tem para solução

$$A = 35/3; B = -14 \text{ e } C = 10/3$$

Ou seja

$$f(x) = \frac{1}{3} (35x^4 - 42x^5 + 10x^7)$$

$$f'(x) = \frac{70}{3} (2x^3 - 3x^4 + x^6)$$

$$f''(x) = 140 (x^2 - 2x^3 + x^5)$$

2. Verificação do valor Máximo da aceleração

Para a aceleração segunda, tem-se

$$f'''(x) = 140 (2x - 6x^2 + 5x^4)$$

Portanto, vamos encontrar o valor onde a aceleração é máxima, fazendo

$$2 - 6x + 5x^3 = 0$$

A solução numérica deste sistema proporciona 3 raízes, só nos interessando a maior delas, por sabermos ser onde a aceleração máxima ocorre, ou seja, vamos usar a raiz que tem o valor 0,856. Assim

$$f''(0,856) = 140 ((0,856)^2 - 2(0,856)^3 + (0,856)^5) = -8,697$$

Como pode ser verificado na tabela do capítulo seguinte, para o polinômio 4-5-6, este valor é de -8,14, logo este polinômio, 4-5-7, não apresenta vantagem sobre o polinômio tradicional 4.5.6.

3.8 Curvas com Funções Escalonadas

Na busca de curvas de elevação mais eficazes, podemos trabalhar com duas ou mais funções em sequência, dentro de um único domínio. Um caso particularmente interessante consiste na busca de funções que obedeçam à **LFPC**. Para isto partimos de um trecho de função que seja contínua, positiva e nula nos extremos do intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, esta função será o nosso primeiro trecho da aceleração. A **figura 3.8.1** ilustra uma das possíveis possibilidades na procura desta função.

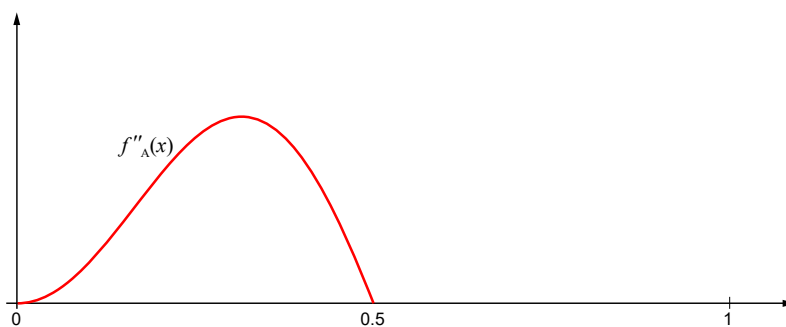


Figura 8.1.1 - Trecho de aceleração base para obtenção da curva.

Agora, nós iremos escalonar o segundo trecho de função a partir de duas reflexões e um deslocamento horizontal da função $f''_A(x)$, obtendo então a aceleração completa no intervalo $[0, 1]$.

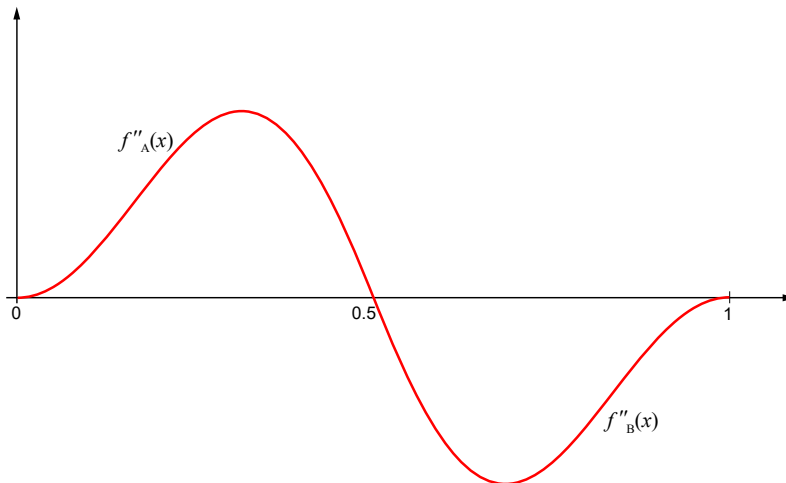


Figura 8.1.2 - Aceleração completa no intervalo $[0, 1]$.

Perceba que a função, escalonada, da aceleração será:

$$f''(x) = \begin{cases} f''_A(x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ f''_B(x) & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \quad (8.1.1)$$

Também é perceptível, pelo gráfico da **figura 8.1.2** que não há descontinuidade na aceleração, conseqüentemente não havendo pontos de *jerk*.

Tudo o que temos a fazer agora, é integrar duas vezes a função $f''_A(x)$, obtendo as partes correspondentes da velocidade e do deslocamento, ou seja, as funções $f'_A(x)$ e $f_A(x)$ no intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, como mostrado na figura abaixo.

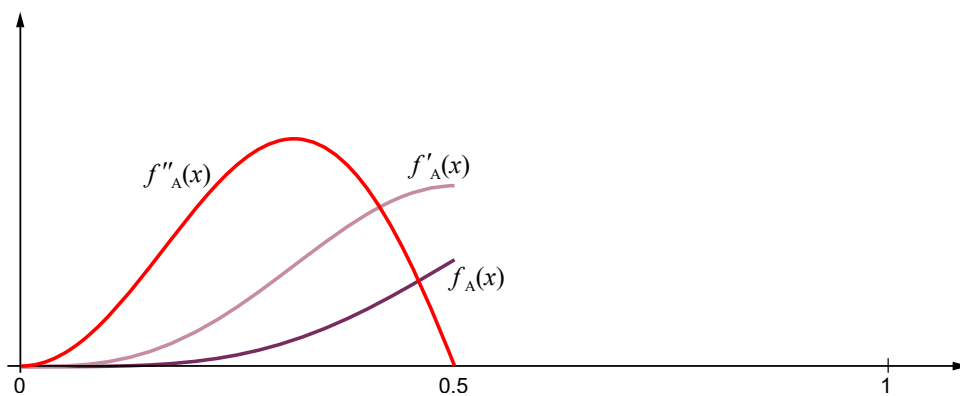


Figura 8.1.3 - Velocidade e deslocamento obtidos de $f''_A(x)$.

Agora, o trecho para escalonamento da função $f'_B(x)$, será obtido a partir de uma reflexão vertical, seguida de um deslocamento horizontal de uma unidade, já para o trecho final, $f_B(x)$ do deslocamento, teremos uma reflexão vertical seguida de um reflexão horizontal, um deslocamento horizontal unitário e um deslocamento vertical de magnitude duas vezes o valor $f_A(0,5)$, tudo isto pode ser expressado na equação (8.1.2) abaixo.

$$\begin{aligned}
 f_B(x) &= 1 - f_A(1 - x) \\
 f'_B(x) &= f'_A(1 - x) \\
 f''_B(x) &= -f''_A(1 - x)
 \end{aligned}
 \tag{8.1.2}$$

E isto pode ser visto, de forma gráfica na **figura 8.1.4** abaixo.

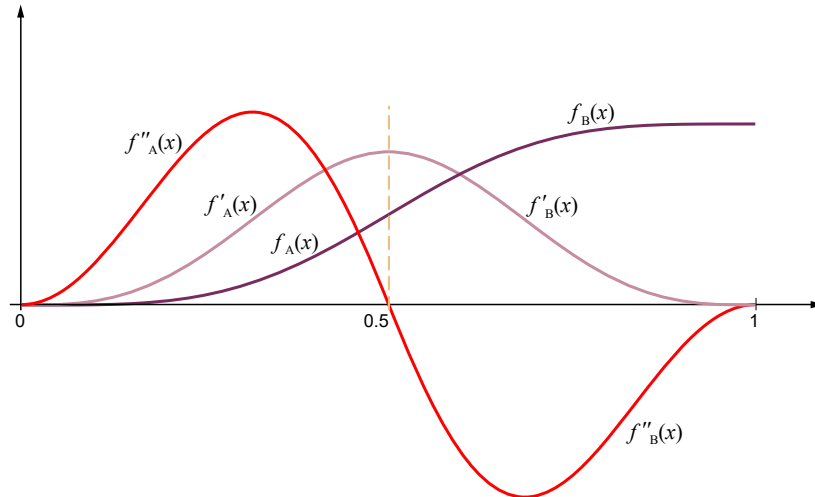


Figura 8.1.4 - Funções deslocamento, velocidade e aceleração completas.

E as expressões para deslocamento, velocidade e aceleração, serão, na ordem:

Deslocamento.

$$f(x) = \begin{cases} f_A(x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ f_B(x) & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}
 \tag{8.1.3}$$

Velocidade.

$$f'(x) = \begin{cases} f'_A(x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ f'_B(x) & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}
 \tag{8.1.4}$$

Aceleração.

$$f''(x) = \begin{cases} f''_A(x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ f''_B(x) & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}
 \tag{8.1.5}$$

Exemplo 3.8.1

Determinar as curvas de deslocamento, esta normalizada, velocidade e aceleração com base na “meia função de aceleração” dada por

$$f''(x) = x - 4x^3$$

Após isto, monte, para todas as curvas, as funções reais com um ângulo de elevação β e altura h .

Solução**1. Obtenção das curvas**

Inicialmente, devemos verificar no domínio $[0, \frac{1}{2}]$, se a função atende aos requisitos postos acima para este tipo de problema.

$$f''(0) = 0 \quad e \quad f''(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - 4(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Sendo a função contínua e nula nos extremos, ela atende aos requisitos para uma “semi aceleração”, efetuando duas integrações na equação vamos obter

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^4$$

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{5}x^5$$

O próximo passo será o ajuste da função $f_A(x)$ para que esta tenha o valor $\frac{1}{2}$ na sua extremidade direita. Isto pode ser feito com uma única expansão vertical, para este caso específico, vamos achar

$$f_A(x) = \frac{240}{7}(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{5}x^5)$$

É claro que este valor, expansão da função, tem que ser feito também nas equações de velocidade e aceleração, então, ficamos com

$$f'_A(x) = \frac{240}{7}(\frac{1}{2}x^2 - x^4)$$

$$f''_A(x) = \frac{240}{7}(x - 4x^3)$$

Ou, de forma simplificada e mais cômoda, temos as três funções dadas por

$$f_A(x) = \frac{8}{7}(5x^3 - 6x^5)$$

$$f'_A(x) = \frac{120}{7}(x^2 - 2x^4)$$

$$f''_A(x) = \frac{240}{7}(x - 4x^3)$$

Aplicando, agora, as equações de (8.1.2), podemos obter as funções $f_B(x)$, $f'_B(x)$ e $f''_B(x)$, que comporão o escalonamento com as funções iniciais

$$f_B(x) = 1 - \frac{8}{7}(5(1-x)^3 - 6(1-x)^5)$$

$$f'_B(x) = \frac{120}{7}((1-x)^2 - 2(1-x)^4)$$

$$f''_B(x) = -\frac{240}{7}((1-x) - 4(1-x)^3)$$

E, finalmente a obtenção das funções completas.

Deslocamento

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{7}(5x^3 - 6x^5) & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{8}{7}(5(1-x)^3 - 6(1-x)^5) & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

Velocidade

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{120}{7}(x^2 - 2x^4) & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{120}{7}((1-x)^2 - 2(1-x)^4) & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

Aceleração

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{240}{7}(x - 4x^3) & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -\frac{240}{7}((1-x) - 4(1-x)^3) & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

Os gráficos destas funções podem ser vistos, logo abaixo na **figura (8.3.1)**, onde é possível se perceber, em uma rápida métrica às funções de velocidade e aceleração, que os picos são bastante interessantes em comparação com a tabela comparativa no capítulo 4.

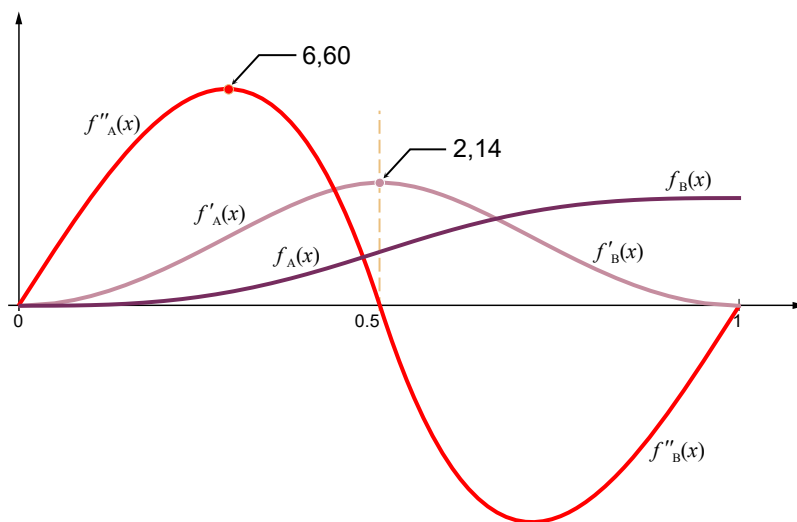


Figura 8.3.1 - Funções resultantes e picos de velocidade e aceleração.

2. Funções em β e h .

Como já sabemos, as transformações em funções com ângulo de elevação β e altura h , se torna fácil quando as funções originais estão normalizadas, bastando apenas multiplicar a função por h e dividir os argumento por β .

Deslocamento

$$f(\theta) = h \cdot \begin{cases} \frac{8}{7} \left[5 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 - 6 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^5 \right] & \text{se } 0 \leq x < \frac{\beta}{2} \\ 1 - \frac{8}{7} \left[5 \left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right)^3 - 6 \left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right)^5 \right] & \text{se } \frac{\beta}{2} \leq x < \beta \end{cases}$$

Velocidade

$$f'(\theta) = h \cdot \begin{cases} \frac{120}{7} \left[\left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 - 2 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 \right] & \text{se } 0 \leq x < \frac{\beta}{2} \\ \frac{120}{7} \left[\left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right)^2 - 2 \left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right)^4 \right] & \text{se } \frac{\beta}{2} \leq x < \beta \end{cases}$$

Aceleração

$$f''(\theta) = h \cdot \begin{cases} \frac{240}{7} \left[\left(\frac{\theta}{\beta} \right) - 4 \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 \right] & \text{se } 0 \leq x < \frac{\beta}{2} \\ -\frac{240}{7} \left[\left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right) - 4 \left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right)^3 \right] & \text{se } \frac{\beta}{2} \leq x < \beta \end{cases}$$

3.9 Codificação em Python

Neste ponto, o aluno deve buscar o código em *Phyton*, para a construção das curvas de elevação e retorno a título de verificação dos problemas que se seguirão mais abaixo. Este código se encontra no link <https://github.com/Mecanismos-UFPE> especificamente na pasta Python-Cames, nesta pasta, o aluno deve proceder ao download do arquivo **elevdiagram.py** e, sobre a forma de utilização dos códigos em *Python* ou *julia*, indicados neste livro, deve se referir ao apêndice I.

Após entrar na sessão deste código, em algum interpretador Python, recomendamos o “jupyter lab”, o aluno deve chamar pelas funções **GetElev** ou **GetRet**, dependendo se quer plotar a curva de elevação ou retorno, respectivamente, estas duas funções retornam um valor que deve ser repassado à função **PlotCurv** que então irá gerar o gráfico da curva solicitada.

Argumentos Repassados às Funções

As duas primeiras recebem os mesmos argumentos e devem ser chamadas no seguinte formato

```
e = GetElev('Curva', h, β)
r = GetRet('Curva', h, β)
```

Para o argumento *Curva*, podemos ter as seguintes opções

- 'harmonica'
- 'cicloide'
- 'duplaharmonica'
- 'duplacicloide'
- '3-4' ou '4-5'
- '3-4-5' ou '4-5-6'
- '3-4-5-6' ou '4-5-6-7'

Atente que as aspas são obrigatórias neste argumento.

Para os outros dois argumentos teremos valores numéricos que serão

- **h** - Valor que representa a altura de elevação
- β - Ângulo de elevação, sempre em radianos

As função `PlotCurv` deve ser chamada em um dos seguintes formatos

```
PlotCurv(curv)
PlotCurv(curv, AcelTrue)
```

Os argumentos serão

- **curv** - Valor obtido na função `GetElev` ou `GetRet`
- **AcelTrue** - Argumento, não obrigatório, se presente, com valor diferente de zero, não plota o gráfico da aceleração segunda.

Então, uma possível forma de uso das funções, código Python, seria

```
from elevdiagram import *
f = GetElev('duplacicloide', 2, pi/2)
g = GetElev('duplahamonica', 2, 2*pi/3)
PlotCurv(f, 1)
PlotCurv(g)
```

Como resultado as funções **PlotCurv(f, 1)** e **PlotCurv(g)** irão plotar os gráficos mostrados nas **figuras 3.9.1** e **3.9.2**, logo abaixo. Nestas figuras a cor azul representa o deslocamento, a cor verde a velocidade, a cor vermelha a aceleração e a cor amarela, que não consta no primeiro diagrama, representa a aceleração segunda.

A primeira chamada à função **PlotCurv**, indica que o gráfico da aceleração segunda não deve ser plotado, como visto na **figura 3.9.1** e isto é posto através do segundo argumento, não nulo colocado na chamada à esta função. Na segunda chamada à esta função, o fato de não ser colocado o segundo argumento, indica que o gráfico da aceleração segunda deve ser plotado, como mostrado na **figura 3.9.2** em amarelo.

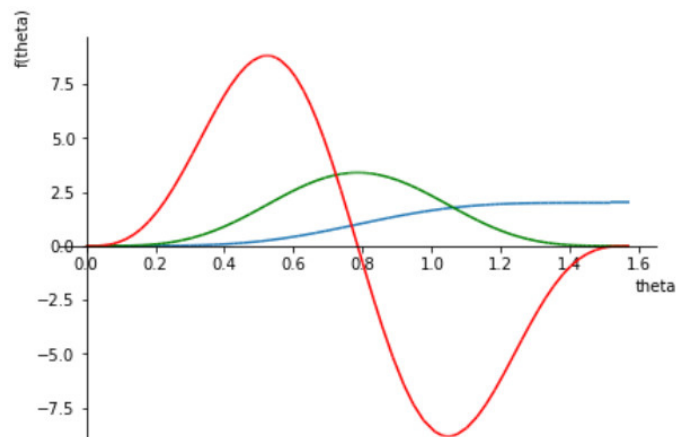


Figura 3.9.1 - Gráfico plotado pela função `PlotCurv(f,1)`.

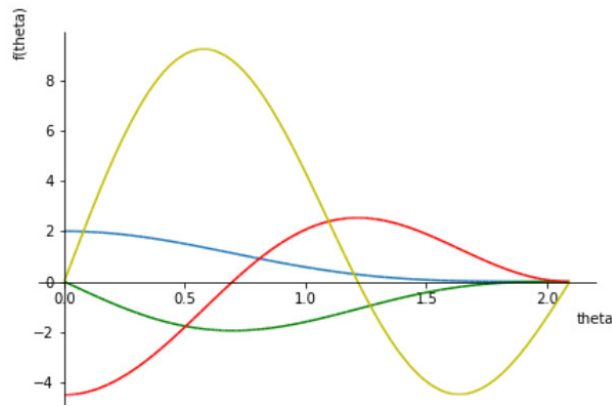


Figura 3.9.2 - Gráfico plotado pela função PlotCurv(g).

3.10 Problemas

- 1 Dentro do domínio fornecido, verifique a possibilidade das funções abaixo poderem ser usadas como curva de elevação obedecendo à **LFPC** e, caso positivo, para cada caso normalizá-las.
 1. $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{27}x^3$ no domínio $[0, 2]$;
 2. $f(x) = x^3 - x^4$ no domínio $[0, \frac{3}{4}]$;
 3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{20}x^5$ no domínio $[0, 2]$;
 4. $f(x) = 3x - \sin x (4 - \cos x)$ no domínio $[0, 2\pi]$;
- 2 Partindo-se da função $\sin x (1 - \cos x)$, integre duas vezes e, ajustando as constantes de integração, de acordo com as condições de contorno impostas ao projeto de cames, verifique, em que domínio, a função resultante pode servir para curva de elevação, logo após, normalize a função resultante e verifique se ela obedece à **LFPC**. Faça esboços para os gráficos de deslocamento, velocidade, aceleração e aceleração segunda.
- 3 Como feito no exemplo 3.7.1, verifique se polinômios do tipo **A-B**, com $b = a + 2$, têm picos de aceleração menores comparativamente ao polinômio **A-B** convencional.
- 4 Dada a função de elevação $f(x) = 1 - \cos x (2 - \cos x)$, no intervalo $[0, \pi]$, faça todas as análises de *perturbação* e *jerk* em seus extremos, verifique os picos de aceleração e aceleração segunda e determine se ela tem alguma semelhança com alguma função já estudada.
- 5 Mostre que, para polinômios do tipo **A-B-C** convencionais, as expressões para a velocidade e a aceleração também podem ser obtidas por

$$f'(x) = \frac{abc}{2}(x-1)^2x^{a-1}$$

$$f''(x) = \frac{abc}{2}[a(1-2x) + bx^2 - 1]x^{a-2}$$

Mostre também que o pico máximo da velocidade ocorre em

$$x_{o_v} = \frac{a-1}{a+1}$$

Que o pico máximo da aceleração ocorre em

$$x_{o_a} = 1 - \frac{1}{ab} \left[2a - \sqrt{2a(a-1)} \right]$$

E, finalmente, que o pico máximo da aceleração segunda ocorre em 1 e será

$$f'''(1) = abc$$

- 6 No polinômio $f(x) = Ax^4 + Bx^5 + Cx^7 + Dx^8$, verifique quais valores dos coeficientes A, B, C e D , podem tornar o polinômio uma curva de elevação que obedeça à **LFPC**.
- 7 A partir da função $f''(x) = 3x^2 - 8x^3 + 4x^4$, no intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, obtenha as funções escalonadas para o deslocamento, velocidade e aceleração normalizados e verifique se há perturbação. Faça esboços para os gráficos de deslocamento, velocidade e aceleração, mostrando os picos.
- 8 Dada a função $f(x) = 5 - 4\cos x - \cos 2x$, normalize-a e verifique se há *perturbação* ou *jerk* nos extremos. Faça esboços para os gráficos de deslocamento, velocidade, aceleração e aceleração segunda.
- 9 Para uma função $f(\theta)$ de elevação qualquer, cujo ângulo de elevação é β_1 , mostre que a função de retorno $g(\theta)$, decorrente dela, após deslocada horizontalmente para a direita de um valor β_2 , pode ser obtida pela expressão abaixo.

$$g(\theta) = f(\beta_1 + \beta_2 - \theta)$$

Faça um esboço, mostrando as duas funções em um único gráfico.

- 10 Para a curva de elevação, escalonada, mostrada no gráfico da **figura 3.9.1** abaixo, a primeira função tem a forma $f_A(x) = 1 - \cos x$, no intervalo $[0, \pi/2]$, a segunda função, $f_B(x)$, é um segmento de reta no intervalo $[\pi/2, \pi]$, e a terceira função $f_C(x)$, decorre de operações na função $f_A(x)$ e está no intervalo $[\pi, 3\pi/2]$.

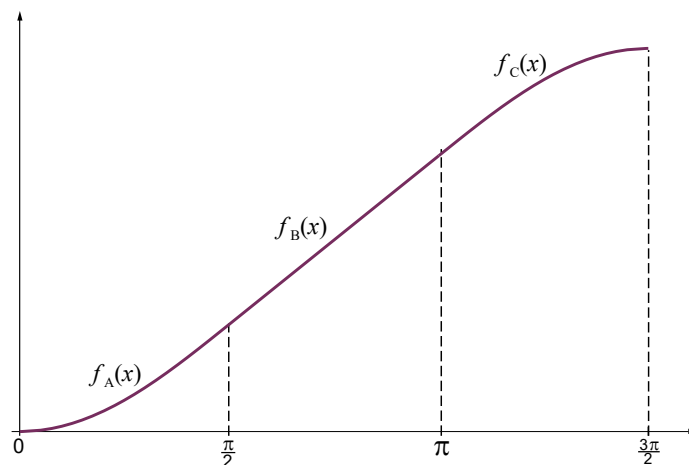


Figura 3.9.1 - elevação escalonada em três funções.

Determine a expressão para esta curva de elevação, como também as suas derivadas e esboce gráficos para velocidade e aceleração. Para concluir, verifique os picos na velocidade e na aceleração.

3.11 Referências

- 1 **NORTON, R. L.**, Cinemática e Dinâmica dos Mecanismos, Industrial press, 1ª edição, Porto Alegre, 2010.
- 2 **FLORES, P.**, Projecto de Mecanismos Came-Seguidor, Publindústria, 1ª edição, Portugal, jan. 2010.
- 3 **NORTON, R. L.**, Cam Design and Manufacturing Handbook, Industrial press, 2nd edition, New York, 2009.
- 4 **ROTHBART, H. A.**, Cam Design Handbook, McGraw-Hill Education - Europe, 2nd revised edition, New York, dez. 2003.
- 5 **BEZERRA, J. M.**, Mecanismos ME-270, Site Oficial do Curso, Recife, 2 de março de 2010, Mecanismos de Came/Curvas de elevação, Disponível em: demec-ufpe.org, Acesso em 12 de novembro de 2021.

