Mecanismos - Avaliação Final

Aluno: ______

Nota:

1. Tomando como base a função mostrada abaixo para a elevação, e atentando para o fato de que esta tem a sua aceleração positiva (não nula) já no início da elevação, encontre uma outra função para retorno (diferente dela mesma) que possa compor com ela, em um gráfico do tipo **E-R** (ou seja, sem nenhum repouso) sem que haja *jerk* em nenhum ponto, determinando os valores de β_1 e β_2 que possibilitem isto.

$$f(\theta) = \frac{h}{2}\left[1 - \cos\frac{\pi}{\beta}\theta + \frac{1}{4}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{\beta}\theta\right)\right]$$

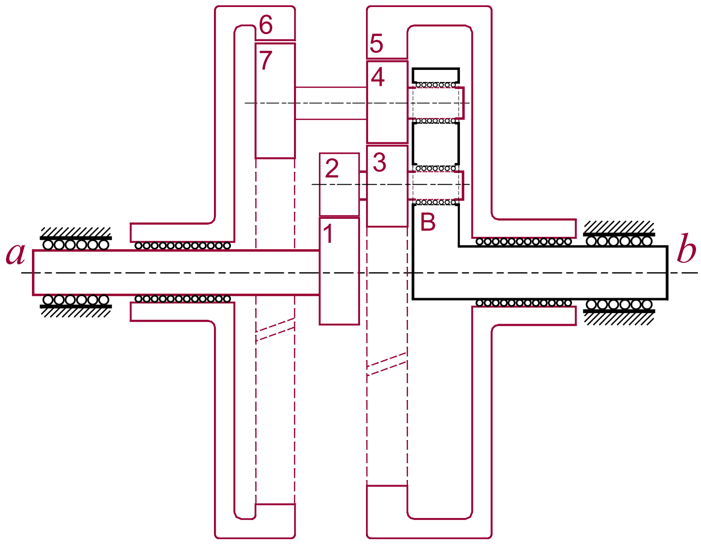
Obs.:

Lembre-se que todas as funções polinomiais começadas com potência 2 têm aceleração positiva no seu início, portanto funções do tipo A-B-C *ou do tipo* A-B-C-D *podem ser boas candidatas.*

2. Considerando um par de engrenagens com uma relação de transmissão unitária ($\varphi = -1$), determine o valor do grau de recobrimento ε e, por análise com este e com a expressão de não interferência, mostre que não haverá interferência se:

$$z_1 > \frac{\pi\varepsilon}{\operatorname{tg}\alpha}$$

3. No trem mostrado abaixo, as engrenagens 5 e 6 têm denteado interno, todas as demais são externas, sendo compostas 2 com 3 e 4 com 7. Sabendo-se que as engrenagens 1, 2, 3, 4 e 7 têm mesmo módulo e mesmo diâmetro e que a quantidade de dentes da engrenagem 5 é a mesma da engrenagem 6, determine a velocidade do anel 6, considerando-se que são conhecidas as velocidades do anel 5 e do sol 1.



Pesos:

Todas as questões terão peso 4, porém havendo uma nota maior que 10, ela será automaticamente reduzida para 10.

Curvas de Elevação

Harmônica

$$f(\theta) = \frac{h}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{\beta}\theta\right)$$

Dupla Harmônica

$$f(\theta) = \frac{h}{2}\left[(1 - cos\frac{\pi}{\beta}\theta) - \frac{1}{4}(1 - cos\frac{2\pi}{\beta}\theta)\right]$$

Cicloide

$$f(\theta) = h\left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{\beta}\theta\right)$$

Polinômios - Lei de Formação

A-B

$$f(\theta) = h\left[b\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^a - a\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^b\right]$$

A-B-C

$$f(\theta) = h\left[\frac{bc}{2}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^a - ac\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^b + \frac{ab}{2}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^c\right]$$

A-B-C-D

$$f(\theta) = h\left[\frac{bcd}{6}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^a - \frac{acd}{2}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^b + \frac{abd}{2}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^c - \frac{abc}{6}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^d\right]$$

Ângulos de Pressão

Expressão Geral

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{f'(\theta)}{f(\theta) + R_p}$$

Ângulo Máximo

$$\text{tg}\,\hat{\varphi} = \frac{f'(\theta_o)}{f(\theta_o) + R_p}$$

Engrenagens

Expressões

$m = \frac{p}{\pi}$	$h_a = m$	$d_a = d + 2m$	$d_b = d\cos\alpha$
$d = mz$	$h_f = 1,25m$	$d_f = d - 2,5m$	$h = h_f + h_a$

Condição para que não haja interferência

$$\frac{4}{\text{sen}^2\alpha}(z_2 + 1) < 2z_1z_2 + z_1^2$$

Interferência, z_2 finito

$$z_1 > \sqrt{z_2^2 + \frac{4}{\text{sen}^2\alpha}(z_2 + 1)} - z_2$$

Interferência com a Cremalheira

$$z_1 > \frac{2}{\text{sen}^2\alpha}$$

Grau de Recobrimento

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - (r_1 + r_2)\,\text{sen}\,\alpha}{p\cos\alpha}$$

Afastamento de Centro

$$r_1'\cos\alpha' = r_1\cos\alpha$$
$$r_2'\cos\alpha' = r_2\cos\alpha$$
$$C'\cos\alpha' = C\cos\alpha$$
$$p'C = pC'$$
$$r_{b1}' = r_{b1} \mid r_{b2}' = r_{b2}$$
$$r_{a1}' = r_{a1} \mid r_{a2}' = r_{a2}$$

Trens Simples/Compostos

simples ext-ext	simples ext-int	um eixo composto
$\varphi = -\frac{z_1}{z_2}$	$\varphi = \frac{z_1}{z_2}$	$\varphi = \frac{z_1z_3}{z_2z_4}$

Trem Epicicloidal

$$\frac{\omega_B - \omega_4}{\omega_B - \omega_1} = \frac{z_1z_3}{z_2z_4}$$

Trem Planetário

$$\frac{\omega_B - \omega_3}{\omega_B - \omega_1} = -\frac{z_1}{z_3}$$

Gabarito

Questão 1

Derivando duas vezes função dada, vamos obter a aceleração

$$f''(\theta) = \frac{h\pi^2}{2\beta_1^2}\left(\cos\frac{\pi}{\beta_1}\theta + \cos\frac{2\pi}{\beta_1}\theta\right) \tag{1.1}$$

Que, por sua vez, tem nos seus extremos

$$\begin{aligned} f''(0) &= \tfrac{h\pi^2}{\beta_1^2} \\ f''(\beta_1) &= 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Portanto, temos que encontrar uma função de retorno que tenha aceleração nula em seu início e positiva, de valor $h\pi^2/\beta^2$, em seu final. O que equivale a uma função de elevação (ainda não transformada em retorno) com aceleração positiva em seu início e nula em seu final e, como sabemos, os polinômios do tipo A-B-C e A-B-C-D têm essa característica desde que comecem com a potência 2. Vamos então utilizar o polinômio 2-3-4.

$$f(\theta) = h\left[6\left(\frac{\theta}{\beta_2}\right)^2 - 8\left(\frac{\theta}{\beta_2}\right)^3 + 3\left(\frac{\theta}{\beta_2}\right)^4\right] \tag{1.3}$$

Desnecessário frisar aqui que esta composição, sem jerk em nenhum ponto, só será possível se não houverem repousos envolvidos.

A segunda derivada da função (1.3) nos fornece

$$f''(\theta) = \frac{12h}{\beta_2^2}\left[1 - 4\frac{\theta}{\beta_2} + 3\left(\frac{\theta}{\beta_2}\right)^2\right] \tag{1.4}$$

Com efeito, esta função vai nos servir, pois

$$\begin{aligned} f''(0) &= \tfrac{12h}{\beta_2^2} \\ f''(\beta_2) &= 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Igualando os valores de aceleração positiva na função de elevação e na função que vai servir de base para o retorno.

$$\frac{h\pi^2}{\beta_1^2} = \frac{12h}{\beta_2^2} \tag{1.6}$$

Que nos leva a

$$\beta_2 = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\beta_1 \tag{1.8}$$

Agora, considerando que $\beta_1 + \beta_2 = 2\pi$, vamos obter

$$\beta_1 = \frac{2\pi^2}{\pi + 2\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \beta_2 = \frac{4\pi\sqrt{3}}{\pi + 2\sqrt{3}} \tag{1.9}$$

Questão 2

Para este problema, sendo $\varphi = -1$, teremos, como consequência $z_1 = z_2 = z$, e então $r_1 = r_2 = r$, como também $r_{a1} = r_{a2} = r_a$ e $r_{b1} = r_{b2} = r_b$, e a expressão para o grau de recobrimento fica

$$\varepsilon = \frac{2\sqrt{r_a^2 - r_b^2} - 2r\,\mathrm{sen}\,\alpha}{p\cos\alpha} \tag{2.1}$$

E, sendo

$$\begin{aligned} r &= \tfrac{mz}{2} \\ r_a &= \tfrac{mz}{2} + m \\ r_b &= \tfrac{mz}{2}\cos\alpha \\ p &= m\pi \end{aligned} \tag{2.2}$$

A expressão, para o grau de recobrimento, se transforma em

$$\varepsilon = \frac{2\sqrt{(\frac{mz}{2}+m)^2-(\frac{mz}{2}\cos\alpha)^2}-mz\,\text{sen}\,\alpha}{m\pi\cos\alpha} \tag{2.3}$$

E, retrabalhando a equação (2,3) se chega a

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{z^2+4z+4-z^2\cos^2\alpha}-z\,\text{sen}\,\alpha}{\pi\cos\alpha} \tag{2.4}$$

Ou o mesmo que

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{z^2\text{sen}^2\alpha+4(z+1)}-z\,\text{sen}\,\alpha}{\pi\cos\alpha} \tag{2.5}$$

Agora, colocando-se o seno ao quadrado, que está dentro do radical, em evidência

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{z^2+\frac{4}{\text{sen}^2\alpha}(z+1)}-z\right)\text{tg}\,\alpha \tag{2.6}$$

Ou seja

$$\frac{\varepsilon\pi}{\text{tg}\,\alpha} = \sqrt{z^2+\frac{4}{\text{sen}^2\alpha}(z+1)}-z \tag{2.7}$$

Agora comparando a equação (2.7) com a equação que garante o não engripamento, já considerando $z_1 = z_2 = z$, se tem

$$z > \sqrt{z^2+\frac{4}{\text{sen}^2\alpha}(z+1)}-z \tag{2.8}$$

Analisando as equações (2.8) e (2.7), chegamos a conclusão que

$$z > \frac{\varepsilon\pi}{\text{tg}\,\alpha} \tag{2.9}$$

<u>Questão 3</u>

Como o enunciado do problema afirma que todas as engrenagens do tipo externo têm mesmo módulo e diâmetro, significa então que têm a mesma quantidade de dentes. Com base nisto o desenvolvimento inicial fica como mostrado abaixo para o primeiro e segundo trem que se interconectam.

PRIMEIRO TREM

$$\frac{\omega_B-\omega_6}{\omega_B-\omega_1} = \frac{z_1\cdot z_3\cdot z_7}{z_2\cdot z_4\cdot z_6} = \frac{z_1}{z_6}$$

$$\frac{\omega_B-\omega_6}{\omega_B-\omega_1} = \frac{z_1}{z_6}$$

$$\omega_B\cdot z_6-\omega_6\cdot z_6 = \omega_B\cdot z_1-\omega_1\cdot z_1$$

$$\omega_B = \frac{\omega_6\cdot z_6-\omega_1\cdot z_1}{z_6-z_1}$$

SEGUNDO TREM

$$\frac{\omega_B-\omega_5}{\omega_B-\omega_1} = \frac{z_1\cdot z_3}{z_2\cdot z_5} = \frac{z_1}{z_5}$$

$$\frac{\omega_B-\omega_5}{\omega_B-\omega_1} = \frac{z_1}{z_5}$$

$$\omega_B\cdot z_5-\omega_5\cdot z_5 = \omega_B\cdot z_1-\omega_1\cdot z_1$$

$$\omega_B = \frac{\omega_5\cdot z_5-\omega_1\cdot z_1}{z_5-z_1}$$

Da última linha, concluímos então que

$$\frac{\omega_6 z_6-\omega_1 z_1}{z_6-z_1} = \frac{\omega_5 z_5-\omega_1 z_1}{z_5-z_1} \tag{3.1}$$

Tendo as engrenagens 5 e 6 a mesma quantidade de dentes, é certo que $z_6 - z_1 = z_5 - z_1$, então

$$\omega_6 z_6-\omega_1 z_1 = \omega_5 z_5-\omega_1 z_1 \tag{3.2}$$

$$\omega_6 z_6 = \omega_5 z_5$$

Novamente, levando em conta que $z_6 = z_5$, obtemos finalmente

$$\omega_6 = \omega_5 \tag{3.3}$$

Solucionando a questão.