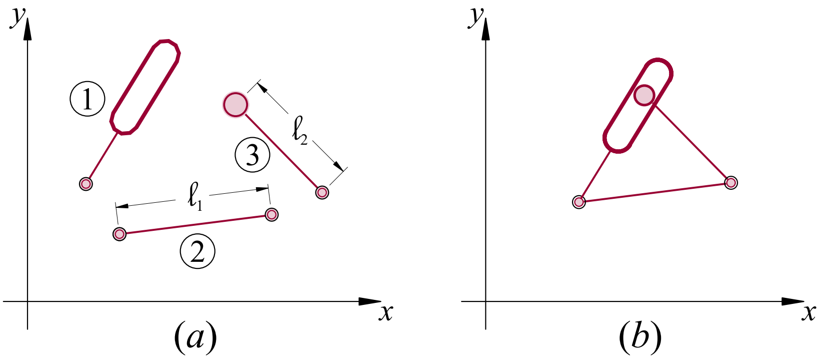
Mecanismos - 1ª Avaliação

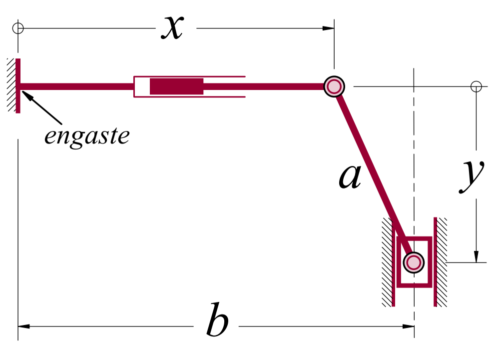
Nota:

Aluno: ______________________________

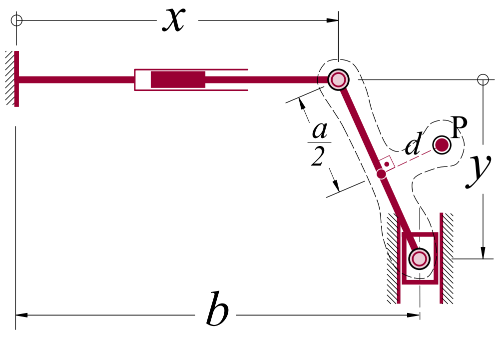
1. Na figura abaixo, o sistema mostrado em (*a*) é composto por três corpos rígidos, 1, 2 e 3, livres no plano. Após a montagem, reproduzida em (*b*), foram ligadas as três barras formando dois pares cinemáticos do tipo rotativo, com um grau de liberdade, e um par cinemático superior do tipo "*h*", com dois graus de liberdade. Inicialmente, para o sistema em (*a*), determine um sistema de coordenadas generalizadas conveniente que o reproduza e determine com quantos graus de liberdade ficou o sistema, após a montagem feita em (*b*), com base na expressão $f = n - r$, onde n é igual ao total de coordenadas constante do sistema de coordenadas generalizadas inicialmente determinado e r a quantidade de equações de restrição que foram geradas.



2. Na cadeia mostrada, o atuador hidráulico impulsiona a barra a que, por sua vez desloca o pistão na vertical. Considerando (x, y) para o sistema de coordenadas generalizadas, sendo portanto x a coordenada principal, determine o deslocamento, velocidade e aceleração da coordenada y em função única e exclusivamente da coordenada principal.



3. Ainda com base no problema anterior, considerando o ponto **P**, como ponto acoplador da barra a, estando este a uma distância d do centro da barra a, determine as equações paramétricas para o deslocamento, velocidade e aceleração do ponto P em função apenas das constantes envolvidas e das variáveis generalizadas que foram dadas.



Pesos:

Todas as questões têm peso 4, porém, havendo um somatório igual a 12, este cai naturalmente para 10, sem acúmulo para as próximas unidades.

Cadeias Impostas

Deslocamento

$$\begin{cases} f_1(q, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) = 0 \\ f_2(q, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ f_n(q, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) = 0 \end{cases}$$

Velocidade

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \frac{\partial f_1}{\partial s_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \frac{\partial f_2}{\partial s_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \frac{\partial f_n}{\partial s_2} & \frac{\partial f_n}{\partial s_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q} \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \vdots \\ \dot{s}_n \end{Bmatrix} = \mathbf{K}\dot{q} \quad \text{sendo} \quad \mathbf{K} = \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{Bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}$$

Aceleração

$$\mathbf{L} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{Bmatrix} = \frac{d}{dq}\mathbf{K} \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \\ \vdots \\ \ddot{s}_n \end{Bmatrix} = \ddot{q}\mathbf{K} + \dot{q}^2\mathbf{L}$$

Cadeias Não Impostas

Obtenção dos F's e K's

$$\mathbf{F}_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q_i} \end{Bmatrix}, i = 1 \ldots m \;\; \text{e} \;\; \mathbf{K}_i = \begin{Bmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ \vdots \\ k_{in} \end{Bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}_i$$

Onde

$$k_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial q_j}$$

Velocidade e Aceleração

$$\dot{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{K}_i \dot{q}_i \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^{m} (\ddot{q}_i \mathbf{K}_i + \dot{q}_i^2 \mathbf{L}_i)$$

Onde

$$\mathbf{L}_i = \frac{1}{\dot{q}_i}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial s_k}\dot{s}_k\right)$$

Específico - Cadeias com Dois Graus de Liberdade e Cinco Barras

$$\mathbf{L}_1 = \frac{1}{\dot{q}_1}\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial k_{11}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{11}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial k_{12}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{12}}{\partial q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{11}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{11}}{\partial s_2} \\ \frac{\partial k_{12}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{12}}{\partial s_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{L}_2 = \frac{1}{\dot{q}_2}\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial k_{21}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{21}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial k_{22}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{22}}{\partial q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{21}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{21}}{\partial s_2} \\ \frac{\partial k_{22}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{22}}{\partial s_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix}\right)$$

Ponto Acoplador

Deslocamento

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_o \\ y_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Coeficiente de Velocidade

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_o + k_s \begin{bmatrix} -\sin s & -\cos s \\ \cos s & -\sin s \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Velocidade e Aceleração

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{Bmatrix} = \dot{q}\mathbf{K}_p \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{X}}_p = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \end{Bmatrix} = \ddot{q}\mathbf{K}_p + \dot{q}^2\mathbf{L}_p$$

Onde

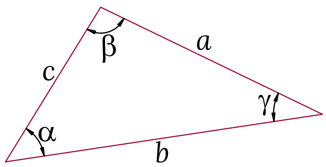
$$\mathbf{L}_p = \frac{d}{dq}\mathbf{K}_p$$

Expressões Trigonométricas

Soma e subtração de arcos

$$\text{sen}\,(a \pm b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b \pm \text{sen}\,b \cdot \cos a$$
$$\cos\,(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$$

Lei dos senos



$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$$

Lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma$$

Álgebra Matricial

Inversão de Matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Operações em bloco

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] \cdot \left\{\begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ \hline k_3 \\ k_4 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \hline f_3 \\ f_4 \end{array}\right\}$$

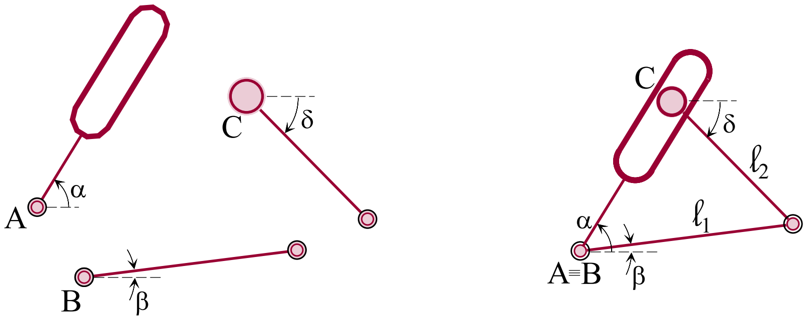
$$\begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} k_3 \\ k_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} a_{31} \\ a_{41} \end{Bmatrix} \cdot k_1 - \begin{Bmatrix} a_{32} \\ a_{42} \end{Bmatrix} \cdot k_2\right)$$

Gabarito

Questão 1

Denominando A, B e C para as extremidades das barras 1, 2 e 3 e também os ângulos α, β e δ, que estas fazem com a horizontal, veja figura abaixo, vamos ter a expressão (1.1) para coordenadas generalizadas.



$$(x_A, x_B, x_C, y_A, y_B, y_C, \alpha, \beta, \delta) \tag{1.1}$$

E então, na montagem, podemos determinar as seguintes equações de restrição:

$$\begin{aligned}
&1.\ x_A = x_B\\
&2.\ y_A = y_B\\
&3.\ \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \operatorname{tg}\alpha\\
&4.\ x_B + \ell_1 \cos\beta = x_C + \ell_2 \cos\delta\\
&5.\ y_B + \ell_1 \operatorname{sen}\beta = y_C + \ell_2 \operatorname{sen}\delta
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Havendo 9 coordenadas no sistema (1.1) e, como decorrência 5 equações de restrição, obtidas em (1.2), vamos ficar então com

$$\begin{aligned} f &= n - r\\ &= 9 - 5\\ &= 4 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Questão 2

O sistema de coordenadas generalizadas, já fornecido no problema, é:

$$(x, y) \tag{2.1}$$

Verificando que o triângulo retângulo, formado pela barra a, com a horizontal e com a vertical, tem a para hipotenusa, $(b - x)$ e y para catetos, podemos construir a seguinte equação de restrição:

$$y^2 + (b - x)^2 - a^2 = 0 \tag{2.2}$$

Para deslocamento, ficamos então com

$$y = \sqrt{a^2 - (b - x)^2} \tag{2.3}$$

Um vez que y negativo não deve ocorrer segundo a geometria do problema.

Agora derivando em x, de forma implícita, a expressão (2.2), termos

$$2yk_y - 2(b - x) = 0 \tag{2.4}$$

Com isto

$$k_y = \frac{b - x}{y} \tag{2.5}$$

E então, temos a velocidade

$$\dot{y} = k_y \dot{x} \tag{2.6}$$

Agora compondo a aceleração, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial k_y}{\partial x} &= -\tfrac{1}{y}\\ \frac{\partial k_y}{\partial y} &= -\tfrac{b-x}{y^2}\end{aligned} \tag{2.7}$$

Sendo, então

$$\begin{aligned}\ell_y &= \frac{\partial k_y}{\partial x} + \frac{\partial k_y}{\partial y} k_y\\ &= -\frac{1}{y} - \frac{b-x}{y^2}\left(\frac{b-x}{y}\right)\\ &= -\frac{1}{y}\left(1 + \left(\frac{b-x}{y}\right)^2\right)\\ &= -\frac{a^2}{y^3}\end{aligned} \tag{2.8}$$

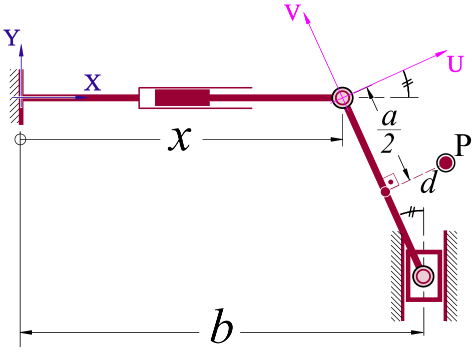
E com isto determinamos a aceleração pela fórmula $\ddot{y} = k_y \ddot{x} + \dot{x}^2 \ell_y$, que seria então:

$$\ddot{y} = \frac{1}{y}\left((b-x)\ddot{x} - \left(\frac{a}{y}\right)^2 \dot{x}^2\right) \tag{2.9}$$

Questão 3

Para este problema, vamos colocar o sistema global no engaste, e o sistema local, fixo na barra a, exatamente na sua extremidade superior, de tal forma que o eixo U fique perpendicular a esta.

v



Desta forma, há de se notar que o ângulo formado pelo eixo U e a horizontal (s_i) é o mesmo que a barra a forma com a vertical, desta forma

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} s_i &= \tfrac{b-x}{a}\\ \cos s_i &= \tfrac{y}{a}\end{aligned} \tag{3.1}$$

Então, com base nos eixos global e local, podemos escrever

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{y}{a} & -\frac{b-x}{a} \\ \frac{b-x}{a} & \frac{y}{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d \\ -\frac{a}{2} \end{Bmatrix} \tag{3.2}$$

Ou seja, para deslocamentos

$$\begin{cases} x_p = x + \frac{yd}{a} + \frac{b-x}{2} \\ y_p = \frac{d(b-x)}{a} - \frac{y}{2} \end{cases} \tag{3.3}$$

Derivando, no tempo, o sistema (3.3), vamos obter as velocidades

$$\begin{cases} \dot{x}_p = \frac{1}{2}\dot{x} + \frac{d}{a}\dot{y} \\ \dot{y}_p = -\frac{d}{a}\dot{x} - \frac{1}{2}\dot{y} \end{cases} \tag{3.4}$$

Derivando(3.4) mais uma vez no tempo, chegamos a

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = \frac{1}{2}\ddot{x} + \frac{d}{a}\ddot{y} \\ \ddot{y}_p = -\frac{d}{a}\ddot{x} - \frac{1}{2}\ddot{y} \end{cases} \tag{3.5}$$