



Mecanismos - 2ª Avaliação

15/08/2023

Nota:

Aluno: _____

1. Um came, radial de rolo, tem um diagrama de elevação do tipo **E-R-R_i**. Para a elevação utiliza-se a dupla harmônica e para retorno o polinômio **4-5**, sendo a aceleração do seguidor, ao final da elevação, igual a **-81 mm/seg²**, para uma velocidade angular do came na ordem de **3 rad/seg**. Sabendo-se que o ângulo de elevação é igual a **2π/3**, determine qual será o ângulo de retorno para que não se tenha **jerk** em nenhum ponto no diagrama completo da elevação e, ao final, mostre a expressão para a aceleração segunda e verifique, com esta, se haverá algum ponto de perturbação.
2. Considerando, no problema anterior, um ângulo de projeto da ordem de 20°, Determine o raio da circunferência principal R_p , para que se tenha uma geometria do conjunto a menor possível. Após isto determine os raios das circunferências primitivas na elevação e no retorno.

Obs.:

Para o polinômio 4-5, tem-se:

$$\theta_o = \frac{\beta}{2} (1 + K)$$

$$K = \frac{4}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} - \sqrt{1 + \left(\frac{4}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right)^2} - \frac{4}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}$$

$$\frac{R_p}{h} = (K + 1)^4 \cdot \frac{4K^2 - 7K + 5}{64(1 - 2K)}$$

3. Um mecanismo do tipo came seguidor **de mesa** tem o polinômio 3-4-5 para elevação e retorno os ângulos de elevação, retorno e repouso são idênticos, a mesa tem um comprimento total de 25 mm e, para geometria do mancal, tem-se $a = 4 \text{ mm}$, $\mu_c = 0,17$ e $\mu_m = 0,20$. Determine as dimensões do came (R_o e h) e, garantindo que não haja engripamento ou batida da mesa no mancal, verifique qual deve ser a distância mínima entre a base do mancal e o centro de giro do came.

Obs.:

Para o polinômio 3-4-5, o valor de K (fator que multiplica β para se obter o ponto em que a aceleração é mínima), na tabela dos coeficientes, será:

$$K = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$$

Pesos:

A primeira questão tem peso 3, a segunda questão tem peso 3 e a terceira questão tem peso 4.



Curvas de Elevação

Harmônica

$$f(\theta) = \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\beta} \theta \right)$$

Dupla Harmônica

$$f(\theta) = \frac{h}{2} \left[(1 - \cos \frac{\pi}{\beta} \theta) - \frac{1}{4} (1 - \cos \frac{2\pi}{\beta} \theta) \right]$$

Cicloide

$$f(\theta) = h \left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\beta} \theta \right)$$

Polinômios - Lei de Formação

A-B

$$f(\theta) = h \left[b \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^a - a \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^b \right]$$

A-B-C

$$f(\theta) = h \left[\frac{bc}{2} \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^a - ac \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^b + \frac{ab}{2} \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^c \right]$$

A-B-C-D

$$f(\theta) = h \left[\frac{bcd}{6} \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^a - \frac{acd}{2} \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^b + \frac{abd}{2} \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^c - \frac{abc}{6} \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^d \right]$$

Transformações Geometria/Tempo

$$\dot{y} = f'(\theta) \dot{\theta}$$

$$\ddot{y} = f''(\theta) \dot{\theta}^2$$

$$\ddot{y} = f'''(\theta) \dot{\theta}^3$$

Ângulos de Pressão

Expressão Geral

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f'(\theta)}{f(\theta) + R_p}$$

Ângulo Máximo

$$\text{tg } \hat{\varphi} = \frac{f'(\theta_o)}{f(\theta_o) + R_p}$$

Engripamento do Seguidor

Ângulo limite

$$\operatorname{tg} \varphi_e = \frac{a}{\mu(a + 2b)}$$

Para não haver engripamento

$$\operatorname{tg} \hat{\varphi} < \frac{a}{\mu(a+2b)}$$

$$b < \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\tan \hat{\varphi}} - 1 \right)$$

Raio Primitivo

$$R_i = R_p + f(\theta_o)$$

Seguidores de Mesa

Contato Mesa/Came

$$e = f'(\theta)$$

$$\ell = 1, 1 (f'_{max}(\theta) + \|g'_{min}(\theta)\|)$$

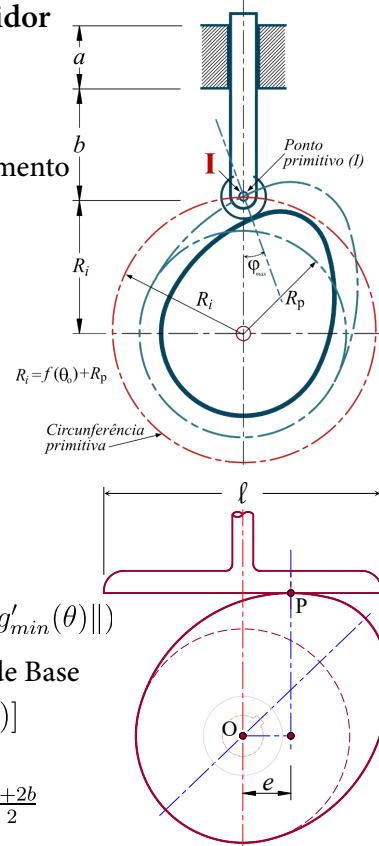
Raio da Circunferência de Base

$$R_o > -[f(\theta) + f''(\theta)]$$

Engripamento

$$f'_{max}(\theta) < \frac{a}{2\mu_m} + \mu_c \frac{a+2b}{2}$$

$$b > \frac{1}{\mu_c} \left[f'_{max}(\theta) - \frac{a}{2} \left(\mu_c + \frac{1}{\mu_m} \right) \right]$$



Curva	θ_o	$\mathbf{K}$	$\frac{R_p}{h}$
Harmônica	$\frac{\beta}{\pi} \arccos \frac{1}{K}$	$\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\beta \operatorname{tg} \widehat{\varphi}} \right)^2}$	$\frac{K-1}{2}$
Cicloide	$\frac{\beta}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{\beta \operatorname{tg} \widehat{\varphi}}$	$\frac{2\pi}{\beta \operatorname{tg} \widehat{\varphi}}$	$\frac{1}{\pi} (K - \operatorname{arctg} K)$
Dupla Harmônica	$\frac{2\beta}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta}{\pi} (K-1) \operatorname{tg} \widehat{\varphi} \right)$	$\sqrt{1 + 3 \left(\frac{\pi}{\beta \operatorname{tg} \widehat{\varphi}} \right)^2}$	$\frac{3(K-1)^2}{8K-4}$
Dupla Cicloide	$\frac{\beta}{2\pi} \arccos \left(1 - \frac{2}{K^2} \right)$	$\sqrt{1 + 16 \left(\frac{\pi}{\beta \operatorname{tg} \widehat{\varphi}} \right)^2}$	$\frac{1}{2\pi} \left[\frac{K^4 - 8K^2 - 18K^{-2} + 26}{3\sqrt{K^2 - 1}} - \arccos \left(1 - \frac{2}{K^2} \right) \right]$
Polinômio 3-4-5	$\frac{\beta}{2} (1+K)$	$\frac{4}{\beta \operatorname{tg} \widehat{\varphi}} + \sqrt{1 + \left(\frac{4}{\beta \operatorname{tg} \widehat{\varphi}} \right)^2}$	$\frac{(K+1)^3 (3K^3 - 9K^2 + 13K - 15)}{4K}$
Polinômio 4-5-6	$\frac{\beta}{2} (1+K)$	$\frac{5}{\beta \operatorname{tg} \widehat{\varphi}} + \sqrt{1 + \left(\frac{5}{\beta \operatorname{tg} \widehat{\varphi}} \right)^2} - \frac{2}{\beta \operatorname{tg} \widehat{\varphi}}$	$\frac{(K+1)^4 (5K^3 - 15K^2 + 21K - 19)}{32(K-1)}$
Polinômio 3-4-5-6	$\frac{\beta}{2} (1+K)$	$\frac{5}{\beta \operatorname{tg} \widehat{\varphi}} - \sqrt{1 + \left(\frac{5}{\beta \operatorname{tg} \widehat{\varphi}} \right)^2} + \frac{2}{\beta \operatorname{tg} \widehat{\varphi}}$	$-\frac{(K+1)^3 (5K^4 - 20K^3 + 36K^2 - 48K + 51)}{32(5K+1)}$
Polinômio 4-5-6-7	$\frac{\beta}{2} (1+K)$	$\frac{6}{\beta \operatorname{tg} \widehat{\varphi}} \sqrt{1 + \left(\frac{6}{\beta \operatorname{tg} \widehat{\varphi}} \right)^2}$	$-\frac{(K+1)^4 (5K^4 - 20K^3 + 36K^2 - 44K + 35)}{192K}$



Gabarito

Questão 1

Cálculo da Altura de Elevação

Tem-se $\ddot{y} = f''(\theta) \dot{\theta}^2 \Rightarrow f''(\theta) = \frac{\ddot{y}}{\dot{\theta}^2}$, ou seja $f''_E(\beta_1) = \frac{-81}{3^2} = -9 \text{ mm}$

Mas, por meio da função de elevação

$$f''_E(\theta) = \frac{h \cdot \pi^2}{2 \cdot \beta_1^2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{\beta_1} \cdot \theta\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{\beta_1} \cdot \theta\right) \right)$$

$$f''_E(\beta_1) = \frac{h \cdot \pi^2}{2 \cdot \beta_1^2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{\beta_1} \cdot \beta_1\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{\beta_1} \cdot \beta_1\right) \right) = -\frac{h \cdot \pi^2}{\beta_1^2} = -9$$

Então

$$h = -\frac{9 \cdot \beta_1^2}{\pi^2} = 4 \text{ mm}$$

Cálculo do Ângulo de Retorno

$$f''_R(\theta) = \frac{20 \cdot h}{\beta_2^2} \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{\theta}{\beta_2}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{\theta}{\beta_2}\right)^3 \right) \Rightarrow f''_R(\beta_2) = \frac{20 \cdot h}{\beta_2^2} \cdot (3 - 4) = -\frac{20 \cdot h}{\beta_2^2}$$

Do enunciado, sabemos que $f''_E(\beta_1) = -9$ e, para que não se tenha jerk ao final da elevação, se faz necessário que $f''_E(\beta_1) = f''_R(\beta_2)$, então

$$-9 = -\frac{20 \cdot h}{\beta_2^2} = -\frac{20 \cdot 4}{\beta_2^2} \Rightarrow \beta_2 = \sqrt{\frac{80}{9}} = 2.981 \text{ rad} = 170.823 \text{ deg}$$

Aceleração Segunda e Verificação à Perturbação

Na elevação:

$$f'''_E(\theta) = -\frac{h \cdot \pi^3}{2 \cdot \beta_1^3} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{\beta_1} \cdot \theta\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{\beta_1} \cdot \theta\right) \right)$$

No Retorno, função que vai gerar a aceleração segunda será:

$$f'''_R(\theta) = \frac{120 \cdot h}{\beta_2^3} \cdot \left(\frac{\theta}{\beta_2} - 2 \cdot \left(\frac{\theta}{\beta_2}\right)^2 \right)$$

Consequentemente, a função gerada e já deslocada será:

$$g'''_R(\theta) = -f'''_R(\beta_1 + \beta_2 - \theta) = -\frac{120 \cdot h}{\beta_2^3} \cdot \left(\frac{\beta_1 + \beta_2 - \theta}{\beta_2} - 2 \cdot \left(\frac{\beta_1 + \beta_2 - \theta}{\beta_2}\right)^2 \right)$$

Logo, a expressão para a aceleração segunda, solicitada no enunciado do problema, será:

$$f'''(\theta) = \begin{cases} f'''_E(\theta) & \text{se } 0 \leq \theta < \beta_1 \\ g'''_R(\theta) & \text{se } \beta_1 \leq \theta < \beta_1 + \beta_2 \\ 0 & \text{se } \beta_1 + \beta_2 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Com relação à perturbação, vemos que no início e no final da elevação, a função $f'''_E(\theta)$ é nula, ao passo que a função $g'''_R(\theta)$ assume o valor $-\frac{120 \cdot h}{\beta_2^3}$ em β_1 (final da elevação) e é nula ao final do retorno ($\beta_1 + \beta_2$), portanto temos um único ponto de perturbação exatamente no final da elevação.



Questão 2

Cálculo de R_p na Elevação

$$K_E = \sqrt{1 + 3 \cdot \left(\frac{\pi}{\beta_1 \cdot \tan(\varphi)} \right)^2} = \sqrt{1 + 3 \cdot \left(\frac{2\pi}{3} \cdot \tan(20) \right)^2} \Rightarrow K_E = 7.208$$

$$R_{pE} = h \cdot \frac{3 \cdot (K_E - 1)^2}{8 \cdot K_E - 4} = 4 \cdot \frac{3 \cdot (7.208 - 1)^2}{8 \cdot 7.208 - 4} \Rightarrow R_{pE} = 8.618 \text{ mm}$$

$$\theta_{oE} = \frac{2 \cdot \beta_1}{\pi} \cdot \arctan \left(\frac{\beta_1}{\pi} \cdot (K_E - 1) \cdot \tan(\varphi) \right) \Rightarrow \theta_{oE} = 1.313 \text{ rad} = 75.228^\circ$$

Cálculo de R_p no Retorno, para $\beta_2 = 2.98 \text{ rad}$, encontrado no prob. anterior

$$K_R = \frac{4}{\beta_2 \cdot \tan(\varphi)} - \sqrt{1 + \left(\frac{4}{\beta_2 \cdot \tan(\varphi)} \right)^2} - \frac{4}{\beta_2 \cdot \tan(\varphi)} = \frac{4}{2.98 \cdot 20} - \sqrt{1 + \left(\frac{4}{2.98 \cdot 20} \right)^2} - \frac{4}{2.98 \cdot 20}$$

$$K_R = 0.384$$

$$R_{pR} = h \cdot \frac{4 \cdot K_R^2 - 7 \cdot K_R + 5}{64 \cdot (1 - 2 \cdot K_R)} \cdot (K_R + 1)^4 = 4 \cdot \frac{4 \cdot (0.384)^2 - 7 \cdot 0.384 + 5}{64 \cdot (1 - 2 \cdot 0.384)} \cdot (0.384 + 1)^4$$

$$R_{pR} = 2.88 \text{ mm}$$

$$\theta_{oR} = \frac{\beta_2}{2} \cdot (1 + K_R) = \frac{2.98}{2} \cdot (1 + 0.384) \Rightarrow \theta_{oR} = 2.064 \text{ rad} = 118.244^\circ$$

Conclusão, como devemos tomar o maior R_p , vamos adotar $R_p = 9 \text{ mm}$.

Raios Primitivos

$$R_I = R_p + f(\theta_o) \Rightarrow R_{IE} = R_p + f_E(\theta_{oE})$$

$$R_{IR} = R_p + f_R(\theta_{oR})$$

Sendo

$$f_E(\theta) = \frac{h}{2} \cdot \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{\beta_1} \cdot \theta \right) - \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{\beta_1} \cdot \theta \right) \right) \right) \quad \text{e} \quad f_R(\theta) = h \cdot \left(5 \left(\frac{\theta}{\beta_2} \right)^4 - 4 \left(\frac{\theta}{\beta_2} \right)^5 \right)$$

Vamos ter:

$$f_E(\theta_{oE}) = 2 \cdot \left(1 - \cos \left(\frac{3}{2} \cdot 1.313 \right) - \frac{1}{4} \cdot (1 - \cos(3 \cdot 1.313)) \right) = 1.927$$

$$f_R(\theta_{oR}) = 4 \cdot \left(5 \left(\frac{2.064}{2.98} \right)^4 - 4 \left(\frac{2.064}{2.98} \right)^5 \right) = 2.049$$

Logo:

$$R_{IE} = R_p + f_E(\theta_{oE}) = 9 + 1.927 \Rightarrow R_{IE} = 10.93 \text{ mm}$$

$$R_{IR} = R_p + f_R(\theta_{oR}) = 9 + 2.049 \Rightarrow R_{IR} = 11.05 \text{ mm}$$



Questão 3

Obtenção de h

Como há simetria no contorno do came, podemos afirmar que:

$$L = 2.2 \cdot f'_{max} \Rightarrow f'_{max} = \frac{L}{2.2} = \frac{25}{2.2} = 11.364$$

E, para o polinômio 3-4-5, se tem

$$f'(\theta) = \frac{30 \cdot h}{\beta} \cdot \left(\left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 + \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 \right)$$

Derivando esta função e igualando a zero, vamos perceber que ela tem o seu máximo em $\theta_o = \frac{\beta}{2}$

Assim:

$$f'\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{30 \cdot h}{\beta} \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right) = \frac{30 \cdot h}{16 \cdot \beta} \Rightarrow \frac{30 \cdot h}{16 \cdot \frac{2 \pi}{3}} = 11.364$$

$$h = \frac{11.364 \cdot 32 \cdot \pi}{90} = 12.694 \text{ mm}$$

Cálculo de R_o

$$f(\theta) = h \cdot \left(10 \cdot \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 - 15 \cdot \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^4 + 6 \cdot \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^5 \right) \quad \text{e} \quad f''(\theta) = \frac{60 \cdot h}{\beta^2} \cdot \left(\frac{\theta}{\beta} - 3 \cdot \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^3 \right)$$

Para o polinômio 3-4-5, o valor de K é $\frac{3 + \sqrt{3}}{6}$, então o ângulo crítico será:

$$\theta_o = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \cdot \beta = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2 \pi}{3} = 1.652 \text{ rad} = 94.641^\circ$$

$$f(1.652) = 11.843 \quad \Rightarrow \quad R_o > -(f(1.652)) + (f''(1.652)) = 4.864 \Rightarrow R_o = 5 \text{ mm}$$

$$f''(1.652) = -16.707$$

Cálculo de b

$$b > \frac{1}{\mu_c} \cdot \left(f'_{max} - \frac{a}{2} \cdot \left(\mu_c + \frac{1}{\mu_m} \right) \right) = \frac{1}{0.17} \cdot \left(11.364 - \frac{4}{2} \cdot \left(0.17 + \frac{1}{0.20} \right) \right) = 6.024 \text{ mm}$$

Cálculo da distância (d) do mancal ao centro

1. Valor com base no engripamento

$$d \geq b + R_o + f\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad \text{sendo} \quad f\left(\frac{\beta}{2}\right) = 12.694 \cdot \left(10 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 - 15 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^4 + 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right) = 6.347$$

Ficamos com

$$d \geq 6.024 + 5 + 6.347 = 17.371 \text{ mm}$$

2. Valor com base no encosto da mesa no mancal

$$d \geq R_o + h = 5 + 12.694 \Rightarrow d > 17.694 \text{ mm}$$

Conclui-se então que a distância do mancal ao centro do came deve ser de 17.694 mm ou maior

