Mecanismos - Avaliação Final

Aluno: ______________________________

Nota:

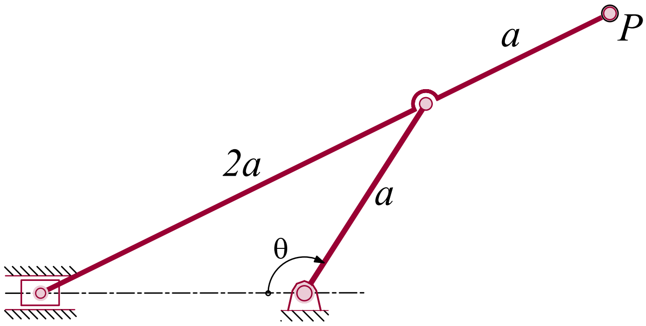
1. Na figura mostrada, a barra, que vai do pistão até o ponto P, é única e linear, tendo um comprimento total de $3a$. Determinada turma, da disciplina Mecanismos, desenvolveu as equações mostradas para as velocidades horizontal e vertical do ponto **P**. Demonstre que as equações desenvolvidas pela turma, estão corretas.

$$\dot{x}_p = a\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\left(1 - \frac{\cos\theta}{2\sqrt{4-\mathrm{sen}^2\theta}}\right)$$

$$\dot{y}_p = \frac{3}{2}a\dot{\theta}\cos\theta$$

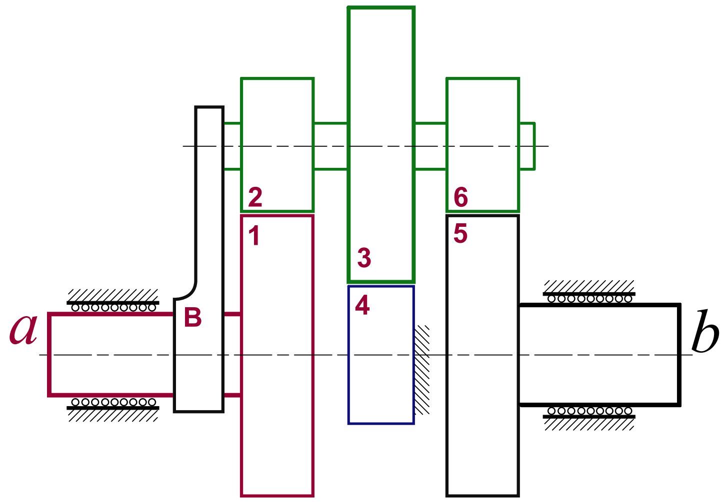
Obs.

90% da pontuação deste problema consiste em o aluno chegar às expressões acima, caso conclua, em determinado ponto do desenvolvimento, que elas são verdadeiras sem desenvolvê-las por completo, terá pontuação nula na questão. Também não será aceito, no resultado, expressões do tipo arcsen(θ) ou arcos(θ).



2. Determinada válvula, em um ciclo, deve permanecer aberta por **0,1** segundos, para se conseguir isto foi imaginado um sistema came seguidor de mesa com uma rotação de **400** *rpm* para o came. Projete este sistema utilizando curvas polinomiais do tipo **3-4** e **4-5**, tendo o cuidado para que não ocorra ***jerk*** em nenhum ponto e, ao final determine o comprimento da mesa.

3. No trem epicicloidal mostrado, a entrada se faz pelo eixo "***a***" e a saída se dá pelo eixo "***b***", os planetas **2**, **3** e **6** são compostos e a engrenagem **4** é fixa. Determine a relação de transmissão e, considerando o mesmo módulo para todas as engrenagens, mostre que para que tenhamos inversão é condição necessária que $z_2 < z_3 < z_6$ ou $z_6 < z_3 < z_2$.



Pesos:

Para esta avaliação os pesos serão 3, 3 e 4 nesta ordem.

MECANISMOS ARTICULADOS

Cadeias Impostas

Deslocamento

$$\begin{cases} f_1(q, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) = 0 \\ f_2(q, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ f_n(q, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) = 0 \end{cases}$$

Velocidade

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \frac{\partial f_1}{\partial s_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \frac{\partial f_2}{\partial s_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \frac{\partial f_n}{\partial s_2} & \frac{\partial f_n}{\partial s_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q} \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \vdots \\ \dot{s}_n \end{Bmatrix} = \mathbf{K}\dot{q} \quad \text{sendo} \quad \mathbf{K} = \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{Bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}$$

Ponto acoplador

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_o \\ y_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

MECANISMO DE CAME

Curvas de Elevação

Harmônica

$$f(\theta) = \frac{h}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{\beta}\theta\right)$$

Dupla Harmônica

$$f(\theta) = \frac{h}{2}\left[(1 - cos\frac{\pi}{\beta}\theta) - \frac{1}{4}(1 - cos\frac{2\pi}{\beta}\theta)\right]$$

Cicloide

$$f(\theta) = h\left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{\beta}\theta\right)$$

Polinômios - Lei de Formação

A-B

$$f(\theta) = h\left[b\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^a - a\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^b\right]$$

A-B-C

$$f(\theta) = h\left[\frac{bc}{2}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^a - ac\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^b + \frac{ab}{2}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^c\right]$$

A-B-C-D

$$f(\theta) = h\left[\frac{bcd}{6}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^a - \frac{acd}{2}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^b + \frac{abd}{2}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^c - \frac{abc}{6}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^d\right]$$

Transformações Geometria/Tempo

$$\dot{y} = f'(\theta)\,\dot{\theta}$$

$$\ddot{y} = f''(\theta)\,\dot{\theta}^2$$

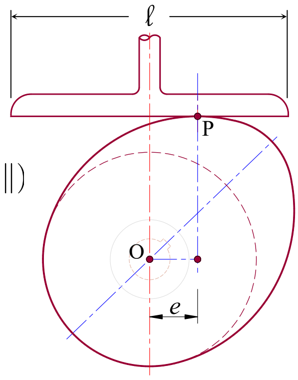
$$\dddot{y} = f'''(\theta)\,\dot{\theta}^3$$

Seguidores de Mesa

Contato Mesa/Came

$$e = f'(\theta)$$

$$\ell = 1,1\,(f'_{max}(\theta) + \|g'_{min}(\theta)\|)$$



Raio da Circunferência de Base

$$R_o > -[f(\theta) + f''(\theta)]$$

Engripamento

$$f'_{max}(\theta) < \frac{a}{2\mu_m} + \mu_c\frac{a+2b}{2}$$

$$b > \frac{1}{\mu_c}\left[f'_{max}(\theta) - \frac{a}{2}\left(\mu_c + \frac{1}{\mu_m}\right)\right]$$

ENGRENAGENS

Expressões

$m = \frac{p}{\pi}$	$h_a = m$	$d_a = d + 2m$	$d_b = d\cos\alpha$
$d = mz$	$h_f = 1,25m$	$d_f = d - 2,5m$	$h = h_f + h_a$

Condição para que não haja interferência

$$\frac{4}{\text{sen}^2\alpha}(z_2 + 1) < 2z_1z_2 + z_1^2$$

Interferência, z_2 finito

$$z_1 > \sqrt{z_2^2 + \frac{4}{\text{sen}^2\alpha}(z_2 + 1)} - z_2$$

Interferência com a Cremalheira

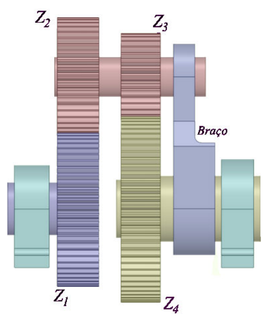
$$z_1 > \frac{2}{\text{sen}^2\alpha}$$

Trens Simples/Compostos

simples ext-ext	simples ext-int	um eixo composto
$\varphi = -\frac{z_1}{z_2}$	$\varphi = \frac{z_1}{z_2}$	$\varphi = \frac{z_1z_3}{z_2z_4}$

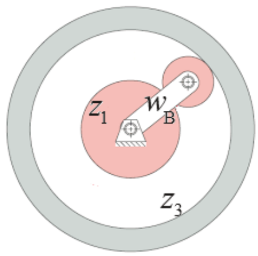
Trem Epicicloidal

$$\frac{\omega_B - \omega_4}{\omega_B - \omega_1} = \frac{z_1z_3}{z_2z_4}$$



Trem Planetário

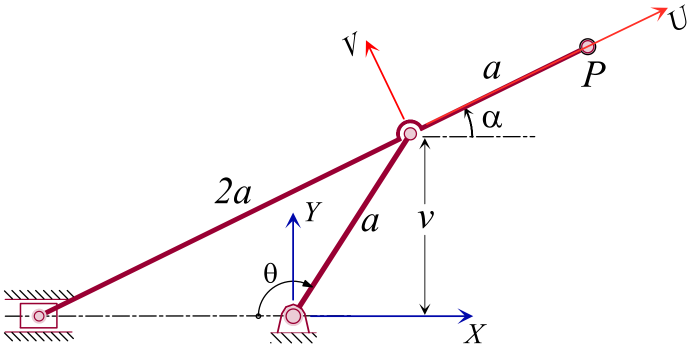
$$\frac{\omega_B - \omega_3}{\omega_B - \omega_1} = -\frac{z_1}{z_3}$$



Gabarito

Questão 1

Para este problema, vamos colocar a origem do sistema global XY, sobre o par rotativo que a barra "a" forma com a barra fixa e a origem do sistema local UV, sobre o par rotativo superior da barra "$3a$", como mostrado na figura.



Desta forma, com base na altura v da figura obtemos.

$$v = 2a\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$v = a\,\mathrm{sen}\,\theta$$

E então, concluímos que

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \text{e} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{4 - \mathrm{sen}^2\,\theta}$$

Onde, claramente, desprezamos o sinal negativo em cos α, por conta de que este, pela geometria do problema não será superior a 90º.

Então, a equação, para o deslocamento do ponto P, será

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -a\cos\theta \\ a\,\mathrm{sen}\,\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{4-\mathrm{sen}^2\,\theta} & -\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta & \frac{1}{2}\sqrt{4-\mathrm{sen}^2\,\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ou seja

$$\begin{cases} x_p = -a\cos\theta + \dfrac{a}{2}\sqrt{4-\mathrm{sen}^2\,\theta} \\ y_p = \dfrac{3}{2}a\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Cujas derivadas, no tempo, vai nos fornecer

$$\begin{cases} \dot{x}_p = a\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\left[1 - \dfrac{\cos\theta}{2\sqrt{4-\mathrm{sen}^2\,\theta}}\right] \\ \dot{y}_p = \dfrac{3}{2}a\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

Questão 2

Inicialmente, devemos determinar o tempo de um período, ou seja, quantas rotações em um segundo.

$$400\,rpm = 400\,\frac{rot}{60\,s} = \frac{20}{3}\frac{rot}{s} = \frac{1}{\frac{3}{20}}\frac{rot}{s} = \frac{1}{0,15}\frac{rot}{s}$$

Sendo assim o came efetua uma rotação em 0,15 segundos, consequentemente, em vista do enunciado, a válvula, em um ciclo, irá passar 0,1 segundos aberta e 0,05 segundos fechada.

Logo, uma simples regra de três, nos permite obter os ângulos para o tempo de abertura e para o tempo de fechamento, ou seja:

$$\beta_1 + \beta_2 = 240^o$$

$$\beta_o = 120^o$$

Função de elevação e suas derivadas.

$$f(\theta) = h\left[4\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^3 - 4\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^4\right]$$

$$f'(\theta) = \frac{12h}{\beta_1}\left[\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^2 - \left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^3\right]$$

$$f''(\theta) = \frac{12h}{\beta_1^2}\left[2\frac{\theta}{\beta_1} - 3\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^2\right]$$

Função de retorno e suas derivadas.

$$g(\theta) = h\left[5\left(\frac{\theta}{\beta_2}\right)^4 - 4\left(\frac{\theta}{\beta_2}\right)^5\right]$$

$$g'(\theta) = \frac{20h}{\beta_2}\left[\left(\frac{\theta}{\beta_2}\right)^3 - \left(\frac{\theta}{\beta_2}\right)^4\right]$$

$$g''(\theta) = \frac{20h}{\beta_2^2}\left[3\left(\frac{\theta}{\beta_2}\right)^2 - 4\left(\frac{\theta}{\beta_2}\right)^3\right]$$

Verificando as acelerações aos finais das curvas de elevação e retorno, teremos:

$$f''(\beta_1) = \frac{12h}{\beta_1^2}[2-3] = -\frac{12h}{\beta_1^2}$$

$$g''(\beta_2) = \frac{20h}{\beta_2^2}[3-4] = -\frac{20h}{\beta_2^2}$$

Igualando estas, para garantir que não se tenha jerk ao final da elevação.

$$-\frac{12h}{\beta_1^2} = -\frac{20h}{\beta_2^2}$$

$$\frac{3}{\beta_1^2} = \frac{5}{\beta_2^2}$$

Ficamos então com duas equações a duas incógnitas.

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 240 \\ 5\beta_1^2 - 3\beta_2^2 = 0 \end{cases}$$

Cuja solução é:

$$\beta_1 = 1,83\,rad = 104,76^o$$

$$\beta_2 = 2,36\,rad = 135,24^o$$

Cálculo da Mesa

De posse dos valores de β_1 e β_2, para elevação e retorno as equações são:

$$f'(\theta) = \frac{12h}{1,83}\left[\left(\frac{\theta}{1,83}\right)^2 - \left(\frac{\theta}{1,83}\right)^3\right] \Rightarrow f''(\theta) = \frac{12h}{1,83^2}\left[2\frac{\theta}{1,83} - 3\left(\frac{\theta}{1,83}\right)^2\right]$$

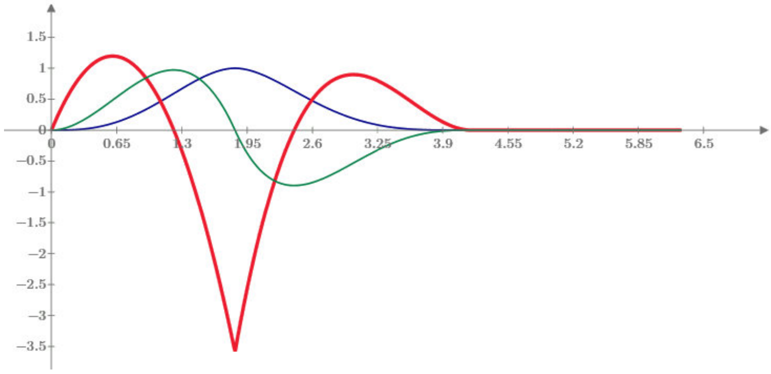
$$g'(\theta) = \frac{20h}{2,36}\left[\left(\frac{\theta}{2,36}\right)^3 - \left(\frac{\theta}{2,36}\right)^4\right] \Rightarrow g''(\theta) = \frac{20h}{2,36^2}\left[3\left(\frac{\theta}{2,36}\right)^2 - 4\left(\frac{\theta}{2,36}\right)^3\right]$$

As acelerações, quando igualadas a zero, irão nos fornecer os ângulos onde ocorrem as velocidades máximas para a elevação $\theta_{o\_elev} = 1{,}22\ rad = 69{,}84^{o}$ e para o retorno $\theta_{o\_ret} = 1{,}77\ rad = 101{,}43^{o}$.

E estes valores aplicados nas equações de velocidade fornecem $f'(1{,}22) = 0{,}97h$ e $g'(1{,}77) = 0{,}89h$, e podemos, então calcular o comprimento da mesa.

$$L = 1,1\,[0,97 + 0,89]\,h = 2,05\,h$$

Como curiosidade, foram plotados os gráficos do deslocamento (azul), velocidade (verde) e aceleração (vermelho) logo a seguir. Para tanto, consideramos $h = 1\ mm$.



Questão 3

Desenvolvendo simultaneamente as expressões para o primeiro e segundo trem no lado esquerdo e direito respectivamente, vamos ter:

$$\frac{\omega_B - \omega_4}{\omega_B - \omega_1} = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} \qquad\qquad \frac{\omega_B - \omega_4}{\omega_B - \omega_5} = \frac{z_3 z_5}{z_4 z_6}$$

Como a engrenagem 4 é fixa

$$\frac{\omega_B}{\omega_B - \omega_1} = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} \qquad\qquad \frac{\omega_B}{\omega_B - \omega_5} = \frac{z_3 z_5}{z_4 z_6}$$

Assim, podemos encontrar ω_B em ambos os lados

$$\omega_B = \frac{z_1 z_3}{z_1 z_3 - z_2 z_4}\omega_1 \qquad\qquad \omega_B = \frac{z_3 z_5}{z_3 z_5 - z_4 z_6}\omega_5$$

E então, igualando as duas expressões, vamos obter:

$$\varphi = \frac{\omega_5}{\omega_1} = \frac{z_1(z_3 z_5 - z_4 z_6)}{z_5(z_1 z_3 - z_2 z_4)} = \frac{\dfrac{z_3}{z_4} - \dfrac{z_6}{z_5}}{\dfrac{z_3}{z_4} - \dfrac{z_2}{z_1}}$$

Pela expressão final, nós concluímos que pode haver inversão em duas situações.

1. $\frac{z_3}{z_4} < \frac{z_6}{z_5} \wedge \frac{z_3}{z_4} > \frac{z_2}{z_1}$

Ou

2. $\frac{z_3}{z_4} > \frac{z_6}{z_5} \wedge \frac{z_3}{z_4} < \frac{z_2}{z_1}$

Mas é visível, pela geometria e pelo fato de se ter mesmo módulo, que se $\frac{z_3}{z_4} < \frac{z_6}{z_5}$, teremos que ter necessariamente $z_3 < z_6$ e, como podemos enxergar isto para todos os casos acima, ficamos com.

1. $z_3 < z_6 \wedge z_3 > z_2$

Ou

2. $z_3 > z_6 \wedge z_3 < z_2$

Que pode se simplificado como:

$$(z_2 < z_3 < z_6) \vee (z_6 < z_3 < z_2)$$