Mecanismos - 1ª Avaliação

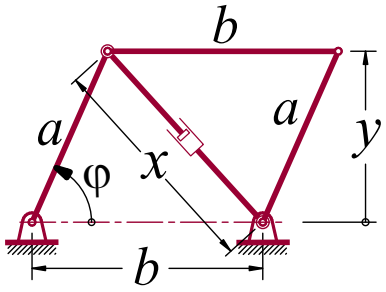
30/11/2023

Nota:

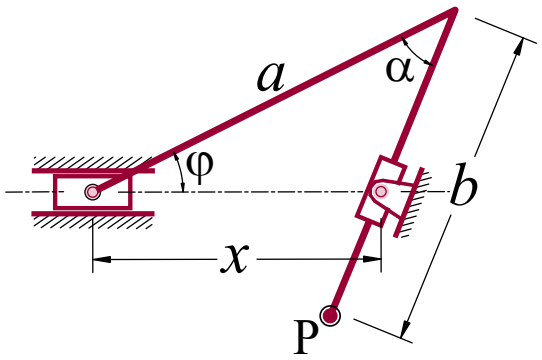
Aluno: _____

1. Para o elevador de motos em manutenção, mostrado na figura abaixo, a mesa, representada pela barra "b", sempre horizontal, se eleva, de "y", pela ação do pistão hidráulico cuja coordenada é "x". Considerando (x, φ, y) para coordenadas generalizadas, mostre que quando a mesa chegar à sua posição mais alta, a aceleração desta poderá ser dada por:

$$\ddot{y} = -\frac{a^2 + b^2}{ab^2}\,\dot{x}^2$$



2. Na cadeia imposta mostrada, o segmento "a" e o semento "b" são uma única barra, de tal forma que o ângulo α, entre eles, é sempre constante. Sendo (x, φ) o sistema de coordenadas generalizadas, mostre que, quando o segmento "b" se tornar vertical, as velocidades do ponto **P**, na horizontal e na vertical vão tender para o infinito.



Pesos:

Peso 4 para a primeira questão e peso 6 para a segunda.

Cadeias Impostas

Deslocamento

$$\begin{cases} f_1(q, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) = 0 \\ f_2(q, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f_n(q, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) = 0 \end{cases}$$

Velocidade

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \frac{\partial f_1}{\partial s_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \frac{\partial f_2}{\partial s_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \frac{\partial f_n}{\partial s_2} & \frac{\partial f_n}{\partial s_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q} \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \vdots \\ \dot{s}_n \end{Bmatrix} = \mathbf{K}\dot{q} \quad \text{sendo} \quad \mathbf{K} = \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{Bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}$$

Aceleração

$$\mathbf{L} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{Bmatrix} = \frac{d}{dq}\mathbf{K} \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \\ \vdots \\ \ddot{s}_n \end{Bmatrix} = \ddot{q}\mathbf{K} + \dot{q}^2\mathbf{L}$$

Cadeias Não Impostas

Obtenção dos F's e K's

$$\mathbf{F}_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q_i} \end{Bmatrix}, i = 1 \ldots m \text{ e } \mathbf{K}_i = \begin{Bmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ \vdots \\ k_{in} \end{Bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}_i$$

Onde

$$k_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial q_j}$$

Velocidade e Aceleração

$$\dot{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{K}_i\dot{q}_i \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^{m}(\ddot{q}_i\mathbf{K}_i + \dot{q}_i^2\mathbf{L}_i)$$

Onde

$$\mathbf{L}_i = \frac{1}{\dot{q}_i}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial s_k}\dot{s}_k\right)$$

Específico - Cadeias com Dois Graus de Liberdade e Cinco Barras

$$\mathbf{L}_1 = \frac{1}{\dot{q}_1}\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial k_{11}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{11}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial k_{12}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{12}}{\partial q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{11}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{11}}{\partial s_2} \\ \frac{\partial k_{12}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{12}}{\partial s_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{L}_2 = \frac{1}{\dot{q}_2}\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial k_{21}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{21}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial k_{22}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{22}}{\partial q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{21}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{21}}{\partial s_2} \\ \frac{\partial k_{22}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{22}}{\partial s_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix}\right)$$

Ponto Acoplador

Deslocamento

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_o \\ y_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Coeficiente de Velocidade

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_o + k_s \begin{bmatrix} -\sin s & -\cos s \\ \cos s & -\sin s \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Velocidade e Aceleração

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{Bmatrix} = \dot{q}\mathbf{K}_p \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{X}}_p = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \end{Bmatrix} = \ddot{q}\mathbf{K}_p + \dot{q}^2\mathbf{L}_p$$

Onde

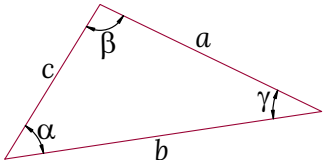
$$\mathbf{L}_p = \frac{d}{dq}\mathbf{K}_p$$

Expressões Trigonométricas

Soma e subtração de arcos

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b \pm \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

Lei dos senos



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma$$

Álgebra Matricial

Inversão de Matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Operações em bloco

$$\left[\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] \cdot \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \hdashline k_3 \\ k_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \hdashline f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} k_3 \\ k_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} a_{31} \\ a_{41} \end{Bmatrix} \cdot k_1 - \begin{Bmatrix} a_{32} \\ a_{42} \end{Bmatrix} \cdot k_2\right)$$

Gabarito

Questão 1

Em função das coordenadas generalizadas (x, φ, y), podemos obter as equações de restrição.

$$\begin{cases} y - a\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0 \\ a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi - x^2 = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

E, derivando, na coordenada principal x, teremos **J**.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a\cos\varphi & 1 \\ 2ab\,\mathrm{sen}\,\varphi & 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{J}^{-1} = -\frac{1}{2ab\,\mathrm{sen}\,\varphi}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2ab\,\mathrm{sen}\,\varphi & -a\cos\varphi \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Derivando na variável principal, chegamos a

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2x \end{Bmatrix} \tag{1.3}$$

Sendo assim

$$\begin{Bmatrix} k_\varphi \\ k_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2ab\,\mathrm{sen}\,\varphi}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2ab\,\mathrm{sen}\,\varphi & -a\cos\varphi \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ -2x \end{Bmatrix} \tag{1.4}$$

E, então

$$k_\varphi = \frac{x}{ab\,\mathrm{sen}\,\varphi} \quad \text{e} \quad k_y = \frac{x}{b}\frac{\cos\varphi}{\mathrm{sen}\,\varphi} \tag{1.5}$$

Para as acelerações, temos

$$\ell_y = \frac{\partial k_y}{\partial x} + \frac{\partial k_y}{\partial \varphi}k_\varphi + \frac{\partial y}{\partial k_y}k_y \tag{1.6}$$

Com

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_y}{\partial x} &= \frac{\cos\varphi}{b\,\mathrm{sen}\,\varphi} \\ \frac{\partial k_y}{\partial \varphi} &= -\frac{x}{b\,\mathrm{sen}^2\varphi} \\ \frac{\partial k_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Obtêm-se

$$\ell_y = \frac{1}{b\,\mathrm{sen}\,\varphi}\left(\cos\varphi - \frac{x^2}{ab}\frac{1}{\mathrm{sen}^2\varphi}\right) \tag{1.8}$$

Quando a mesa chegar na sua altura máxima, o valor de φ será igual a $\pi/2$, logo

$$\ell_y = \frac{1}{b}\left(-\frac{x^2}{ab}\right) = -\frac{x^2}{ab^2} \tag{1.9}$$

Para a aceleração, temos $\ddot{y} = k_y\ddot{x} + \dot{x}^2\ell_y$, mas como em $\pi/2$, k_y é nulo, vem

$$\ddot{y} = -\frac{x^2}{ab^2}\dot{x}^2 \tag{1.10}$$

Percebendo que quando φ for igual a $\pi/2$, $x^2 = a^2 + b^2$, vem

$$\ddot{y} = -\frac{a^2 + b^2}{ab^2}\dot{x}^2 \tag{1.11}$$

Questão 2

Considerando (x, φ), coordenadas generalizadas, a lei dos senos nos fornece

$$\frac{x}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{a}{\operatorname{sen}\left[\pi - (\varphi + \alpha)\right]}$$

E então, a equação de restrição será

$$x \operatorname{sen}(\varphi + \alpha) - a \operatorname{sen}\alpha = 0 \tag{2.1}$$

Que vai fornecer, para deslocamento

$$\varphi = \operatorname{arcsen}\left(\frac{a \operatorname{sen}\alpha}{x}\right) - \alpha \tag{2.2}$$

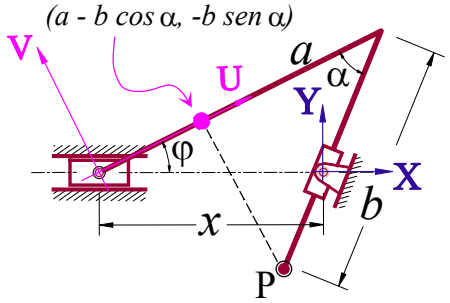
Derivando na variável principal, chegamos a

$$\mathbf{J} = \left[\, x \cos(\varphi + \alpha) \,\right] \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \left\{ \operatorname{sen}(\varphi + \alpha) \right\} \tag{2.3}$$

Como consequência

$$k_\varphi = -\frac{1}{x}\frac{\operatorname{sen}(\varphi + \alpha)}{\cos(\varphi + \alpha)} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = -\frac{\dot{x}}{x}\frac{\operatorname{sen}(\varphi + \alpha)}{\cos(\varphi + \alpha)} \tag{2.4}$$

De posse dos parâmetros em (2.2) e (2.4), podemos agora analisar a velocidade do ponto P, a partir da colocação dos sistemas global e local, como abaixo.



Considerando os sistemas global e local, a geometria da figura nos permite escrever

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -x \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a - b\cos\alpha \\ -b\operatorname{sen}\alpha \end{Bmatrix} \tag{2.5}$$

Ou seja

$$\begin{cases} x_p = -x + (a - b\cos\alpha)\cos\varphi + b\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\alpha \\ y_p = (a - b\cos\alpha)\operatorname{sen}\varphi - b\cos\varphi\ \operatorname{sen}\alpha \end{cases} \tag{2.6}$$

Utilizando as identidades trigonométricas

$$\begin{cases} x_p = -x + a\cos\varphi - b\cos(\varphi + \alpha) \\ y_p = a\operatorname{sen}\varphi - b\operatorname{sen}(\varphi + \alpha) \end{cases} \tag{2.7}$$

Derivando no tempo

$$\begin{cases} \dot{x}_p = -\dot{x} - a\,\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi + b\,\dot{\varphi}\operatorname{sen}(\varphi + \alpha) \\ \dot{y}_p = a\,\dot{\varphi}\cos\varphi - b\,\dot{\varphi}\cos(\varphi + \alpha) \end{cases} \tag{2.8}$$

É fácil se notar que quando o segmento "b" se torna vertical, teremos $\varphi + \alpha = \pi/2$, como consequência $\mathit{sen}\ \varphi = \cos\alpha$ e $\cos\varphi = \mathit{sen}\ \alpha$, então

$$\begin{cases} \dot{x}_p = -\dot{x} - a\,\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi + b\,\dot{\varphi} = \dot{x}[k_\varphi(b - a\cos\alpha) - 1] \\ \dot{y}_p = a\,\dot{\varphi}\cos\varphi = a\,\dot{x}\,k_\varphi\operatorname{sen}\alpha \end{cases} \tag{2.9}$$

Como as duas velocidades envolvem um produto de k_φ por um valor constante e verificando, a partir da equação (2.4), que k_φ tende para infinito quando $\varphi + \alpha = \pi/2$, concluímos que as velocidades horizontal e vertical, do ponto **P**, tendem a infinito nesta situação.