Mecanismos - 2ª Avaliação

Nota:

Aluno: ______________________________

1. Um sistema came seguidor deve deixar aberta uma válvula por 2/3 do ciclo, a curva de elevação deve ser polinomial do tipo A-B e a curva de retorno deve ser do tipo trigonométrica. Determine os valores de β_1 e β_2 e as curvas de elevação e retorno de modo a que não se tenha *jerk* em todo o percurso e também que não haja perturbação no início da elevação:

2. Assuma came de mesa no problema anterior com $h = 12\ mm$, aproxime β_1 para 141º e β_2 para 99º e obtenha o raio da circunferência de base e projete o mancal (determinação de a e b) para $\mu_c = \mu_m = 0{,}2$.

   Obs.

   Na solução deste problema, o aluno deve arbitrar um valor para a ou para b.

3. Dadas duas curvas polinomiais do tipo A-B consecutivas, ou seja sendo a primeira a_1-b_1 e a segunda a_2-b_2 então $a_2 = a_1 + 1$, demonstre que a ausência de jerk, ao final da elevação, vai implicar em:

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{b_2}{a_1}} \cdot \beta_1$$

Pesos:

Peso 4 para a primeira e segunda questão e peso 2 para a terceira.

Curvas de Elevação

Harmônica

$$f(\theta) = \frac{h}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{\beta}\theta\right)$$

Dupla Harmônica

$$f(\theta) = \frac{h}{2}\left[(1 - cos\frac{\pi}{\beta}\theta) - \frac{1}{4}(1 - cos\frac{2\pi}{\beta}\theta)\right]$$

Cicloide

$$f(\theta) = h\left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{\beta}\theta\right)$$

Dupla Cicloide

$$f(\theta) = \frac{4h}{3}\left[\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{\beta}\theta - \frac{1}{4}\left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{\beta}\theta\right)\right]$$

Polinômios - Lei de Formação

A-B

$$f(\theta) = h\left[b\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^a - a\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^b\right]$$

A-B-C

$$f(\theta) = h\left[\frac{bc}{2}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^a - ac\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^b + \frac{ab}{2}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^c\right]$$

A-B-C-D

$$f(\theta) = h\left[\frac{bcd}{6}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^a - \frac{acd}{2}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^b + \frac{abd}{2}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^c - \frac{abc}{6}\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^d\right]$$

Transformações Geometria/Tempo

$$\dot{y} = f'(\theta)\,\dot{\theta}$$

$$\ddot{y} = f''(\theta)\,\dot{\theta}^2$$

$$\dddot{y} = f'''(\theta)\,\dot{\theta}^3$$

Ângulos de Pressão

Expressão Geral

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{f'(\theta)}{f(\theta) + R_p}$$

Ângulo Máximo

$$\mathrm{tg}\,\hat{\varphi} = \frac{f'(\theta_o)}{f(\theta_o) + R_p}$$

Engripamento do Seguidor

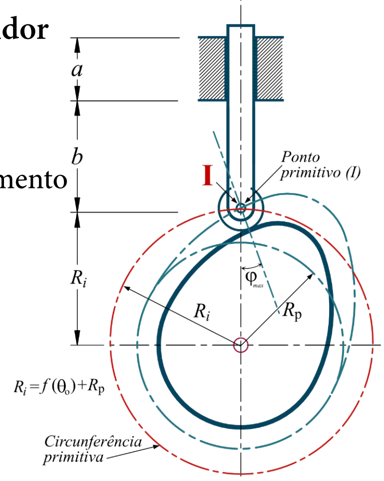
Ângulo limite

$$\mathrm{tg}\,\varphi_e = \frac{a}{\mu(a + 2b)}$$

Para não haver engripamento

$$\mathrm{tg}\,\hat{\varphi} < \frac{a}{\mu(a + 2b)}$$

$$b < \frac{a}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\hat{\varphi}} - 1\right)$$

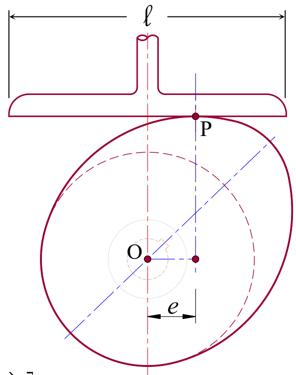


Raio Primitivo

$$R_i = R_p + f(\theta_o)$$

Seguidores de Mesa

Contato Mesa/Came



Raio da Circunferência de Base

$$R_o > -[f(\theta) + f''(\theta)]$$

Engripamento

$$f'_{max}(\theta) < \frac{a}{2\mu_m} + \mu_c\frac{a+2b}{2}$$

$$b > \frac{1}{\mu_c}\left[f'_{max}(\theta) - \frac{a}{2}\left(\mu_c + \frac{1}{\mu_m}\right)\right]$$

Gabarito

Questão 1

O enunciado afirma que a válvula deve ficar aberta por 2/3 do ciclo, então fica explícito que:

$$\beta_1+\beta_2=\frac{4\ \pi}{3}$$

Curva polinomial, do tipo A-B, que não apresente perturbação no seu início deve ter a sua potência mínima em 4, logo vamos utilizar, para elevação a curva polinomial 4-5.

$$f(\theta)=h\cdot\left(5\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^4-4\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^5\right)\quad\Rightarrow\quad f''(\theta)=\frac{20\ h}{\beta_1^{\ 2}}\left(3\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^2-4\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^3\right)$$

E, a única curva trigonométrica, que pode compor com o polinômio 4-5 sem que haja jerk em seu início e final é a Dupla Harmônica.

$$g(\theta)=\frac{h}{2}\left(1-cos\left(\frac{\pi}{\beta_2}\ \theta\right)-\frac{1}{4}\left(1-cos\left(\frac{2\ \pi}{\beta_2}\ \theta\right)\right)\right)\quad\Rightarrow\quad g''(\theta)=\frac{h\pi^2}{2\ \beta_2^{\ 2}}\left(cos\left(\frac{\pi}{\beta_2}\ \theta\right)-cos\left(\frac{2\ \pi}{\beta_2}\ \theta\right)\right)$$

Para que não haja descontinuidade no encontro das duas curvas, devemos ter $f''(\beta_1)=g''(\beta_2)$, então:

$$\frac{20\ h}{\beta_1^{\ 2}}\left(3\left(\frac{\beta_1}{\beta_1}\right)^2-4\left(\frac{\beta_1}{\beta_1}\right)^3\right)=\frac{h\pi^2}{2\ \beta_2^{\ 2}}\left(cos\left(\frac{\pi}{\beta_2}\ \beta_2\right)-cos\left(\frac{2\ \pi}{\beta_2}\ \beta_2\right)\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{20}{\beta_1^{\ 2}}=\frac{\pi^2}{\beta_2^{\ 2}}$$

Encontramos

$$\beta_1:=\frac{4\cdot\pi\cdot\sqrt{20}}{3\cdot\left(\sqrt{20}+\pi\right)}\quad e\quad\beta_2:=\frac{4\cdot\pi^2}{3\cdot\left(\sqrt{20}+\pi\right)}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}\beta_1=2.46\ \mathit{rad} & \beta_2=1.728\ \mathit{rad}\\ \beta_1=140.971\ \mathit{deg} & \beta_2=99.029\ \mathit{deg}\end{matrix}$$

Verificação, considerando h = 1, sendo

$$f''(\theta):=\frac{20}{\beta_1^{\ 2}}\cdot\left(3\cdot\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^2-4\cdot\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^3\right)\quad e\quad g''(\theta):=\frac{\pi^2}{2\cdot\beta_2^{\ 2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{\beta_2}\cdot\theta\right)-\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{\beta_2}\cdot\theta\right)\right)$$

Inicialmente ao Jerk

Inicio da Elevação

$f''(0)=0$

Como antes de começar a elevação seria repouso, com consequente aceleração nula, está ok.

Final da elevação

$f''(\beta_1)=-3.304$ e $g''(\beta_2)=-3.304$

Os dois se equivalem, então está ok.

Final do Retorno

$g''(0)=0$

Como ao término do retorno temos repouso, com consequente aceleração nula, está ok.

Finalmente à Perturbação

$$f'''(\theta):=\frac{20}{\beta_1^{\ 3}}\cdot\left(6\cdot\frac{\theta}{\beta_1}-12\cdot\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^2\right)$$

Inicio da Elevação

$f'''(0)=0$

Como antes de começar a elevação seria repouso, com consequente aceleração segunda nula, está ok.

Questão 2

Dados iniciais

$h:=12\ mm \qquad \beta_1:=141° \qquad \beta_2:=99° \qquad \mu_m:=0.2 \qquad \mu_c:=0.2$

Do problema anterior, já temos

$$f(\theta):=h\cdot\left(5\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^4-4\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^5\right) \qquad g(\theta):=\frac{h}{2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{\beta_2}\theta\right)-\frac{1}{4}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{\beta_2}\theta\right)\right)\right)$$

$$f'(\theta):=\frac{20\ h}{\beta_1}\left(\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^3-\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^4\right) \qquad g'(\theta):=\frac{h\cdot\pi}{2\ \beta_2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{\beta_2}\theta\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{\beta_2}\theta\right)\right)$$

$$f''(\theta):=\frac{20\ h}{\beta_1^2}\left(3\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^2-4\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^3\right) \qquad g''(\theta):=\frac{h\cdot\pi^2}{2\ \beta_2^2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{\beta_2}\theta\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{\beta_2}\theta\right)\right)$$

Cálculo de R_o

$$R_o>-\left[f(\theta_o)+f''(\theta_o)\right]$$

Aqui, em consequência das funções utilizadas, tanto na elevação, quanto no retorno, $\theta_o = \beta$

Na Elevação

$f(\beta_1)=12\ mm \qquad f''(\beta_1)=-39.629\ mm$

$R_{oE}:=-\left[f(\beta_1)+f''(\beta_1)\right]=[27.629]\ mm$ Vamos considerar $R_{oE} = 28\,mm$

No Retorno

$g(\beta_2)=12\ mm \qquad g''(\beta_2)=-39.669\ mm$

A igualdade, $f''(\beta_1) = g''(\beta_2)$, é consequência da ausência de jerk.

$R_{oR}:=-\left[g(\beta_2)+g''(\beta_2)\right]=[27.669]\ mm$ Vamos considerar $R_{oR} = 28\,mm$

Então

$$\boxed{R_o=28\cdot mm}$$

Verificação ao Engripamento

Vamos arbitrar:

$a:=3.5\ mm$

Na Elevação

$$f''(\theta)=0 \qquad \frac{20\ h}{\beta_1^2}\left(3\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^2-4\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^3\right)=0 \qquad 3\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^2-4\left(\frac{\theta}{\beta_1}\right)^3=0 \qquad 3-4\frac{\theta}{\beta_1}=0 \qquad \boxed{\theta=\frac{3}{4}\beta_1}$$

$$f'\left(\frac{3}{4}\beta_1\right)=\frac{20\ h}{\beta_1}\left(\left(\frac{1}{\beta_1}\frac{3}{4}\beta_1\right)^3-\left(\frac{1}{\beta_1}\frac{3}{4}\beta_1\right)^4\right)=\frac{20\ h}{\beta_1}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3-\left(\frac{3}{4}\right)^4\right)=\frac{135}{64}\frac{h}{\beta_1}=\frac{135}{64}\frac{12}{2.461}$$

$$\boxed{f'_{max}:=10.29\cdot mm}$$

$$b_E:=\frac{1}{\mu_c}\left(f'_{max}-\frac{a}{2}\left(\mu_c+\frac{1}{\mu_m}\right)\right)=5.95\ mm$$

No Retorno

$$g''(\theta)=0 \quad cos\left(\frac{\pi}{\beta_2}\theta\right)-cos\left(\frac{2\pi}{\beta_2}\theta\right)=0 \qquad cos\left(\frac{\pi}{\beta_2}\theta\right)-\left(2\ cos\left(\frac{\pi}{\beta_2}\theta\right)^2-1\right)=0$$

$$2\ cos\left(\frac{\pi}{\beta_2}\theta\right)^2-cos\left(\frac{\pi}{\beta_2}\theta\right)-1=0 \qquad cos\left(\frac{\pi}{\beta_2}\theta\right)=\frac{1+\sqrt{1+8}}{4}=1 \qquad cos\left(\frac{\pi}{\beta_2}\theta\right)=\frac{1-\sqrt{1+8}}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{\beta_2}\,\theta = \frac{2\cdot\pi}{3} \qquad \boxed{\theta = \frac{2}{3}\,\beta_2}$$

$$g'\left(\frac{2}{3}\,\beta_2\right) = \frac{h\pi}{2\,\beta_2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{\beta_2}\,\frac{2}{3}\,\beta_2\right) - \frac{1}{2}\,\sin\left(\frac{2\,\pi}{\beta_2}\,\frac{2}{3}\,\beta_2\right)\right) = \frac{h\pi}{2\,\beta_2}\left(sin\left(\frac{2\,\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\,sin\left(\frac{4\,\pi}{3}\right)\right)$$

$$g'\left(\frac{2}{3}\,\beta_2\right) = \frac{12\,\pi}{2\cdot 1.728}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 14.1703$$

$$\boxed{g'_{max} := 14.17\cdot mm}$$

$$b_R := \frac{1}{\mu_c}\left(g'_{max} - \frac{a}{2}\left(\mu_c + \frac{1}{\mu_m}\right)\right) = 25.35\ mm$$

Ficamos então com:

$$\boxed{b := 26\ mm}$$

Questão 3

Uma curva polinomial do tipo A-B, tendo o valor *"a"* para a primeira potência e *"b"* para a segunda potência, tem a forma:

$$f(\theta) = h\cdot\left(b\cdot\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^a - a\cdot\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^b\right)$$

Suas derivadas serão:

$$f'(\theta) = \frac{a\cdot b\cdot h}{\beta}\cdot\left(\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{a-1} - \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{b-1}\right) \qquad \text{e} \qquad f''(\theta) = \frac{a\cdot b\cdot h}{\beta^2}\cdot\left((a-1)\cdot\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{a-2} - (b-1)\cdot\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^{b-2}\right)$$

O valor da aceleração em β será:

$$f''(\beta) = \frac{a\cdot b\cdot h}{\beta^2}\cdot((a-1)-(b-1)) = \frac{a\cdot b\cdot h}{\beta^2}\cdot(a-b) = -\frac{a\cdot b\cdot h}{\beta^2}$$

Para dois polinômio consecutivos "a_1-b_1" e "a_2-b_2" com $a_2 = a_1 + 1$, se considerarmos β_1 na elevação e β_2 no retorno, a ausência de jerk exige que:

$$-\frac{a_1\cdot b_1\cdot h}{{\beta_1}^2} = -\frac{a_2\cdot b_2\cdot h}{{\beta_2}^2} \;\Rightarrow\; \frac{a_1\cdot b_1}{{\beta_1}^2} = \frac{a_2\cdot b_2}{{\beta_2}^2} \;\Rightarrow\; \beta_2 = \sqrt{\frac{a_2\cdot b_2}{a_1\cdot b_1}}\cdot\beta_1$$

Como $a_2 = a_1 + 1$ e $b_1 = a_1 + 1$, consequentemente $a_2 = b_1$, obtemos finalmente:

$$\boxed{\beta_2 = \sqrt{\frac{b_2}{a_1}}\cdot\beta_1}$$