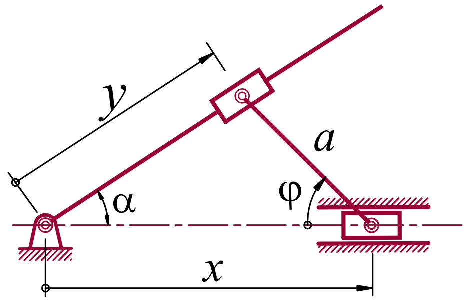
# Mecanismos - 1ª Avaliação

13/08/2024

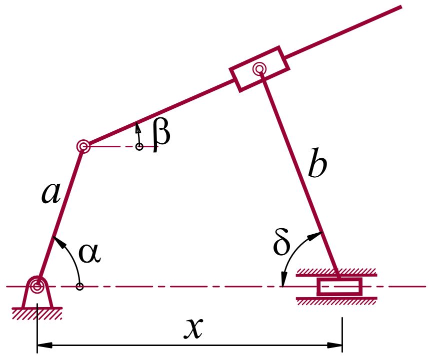
Nota:

Aluno: ______________________________

1. No mecanismo mostrado abaixo, o ângulo $\alpha$ é constante e a coordenada principal é $y$. Desenvolva as expressões para a aceleração do pistão horizontal e só então, após este desenvolvimento, mostre que quando $\alpha = 30^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ e $a = 2$, a aceleração do pistão (horizontal) será igual ao quadrado da velocidade do pistão inclinado, com sentido da direita para a esquerda.




2. Na cadeia cinemática, de 5 barras, mostrada abaixo, o ângulo $\delta$ entre a barra $b$ e o pistão horizontal é constante, consequentemente pistão horizontal e barra $b$ são uma barra única. Considerando ($\alpha$, $\beta$, $x$) para coordenadas generalizadas, o que demandará em uma única equação de restrição, determine o deslocamento, velocidade e aceleração para a barra $b$ (coordenada $x$).




Pesos:

*Peso 5 para a primeira questão e peso 5 para a segunda.*

## Cadeias Impostas

Deslocamento

$$\begin{cases} f_1(q, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) = 0 \\ f_2(q, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) = 0 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ f_n(q, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) = 0 \end{cases}$$

Velocidade

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \frac{\partial f_1}{\partial s_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \frac{\partial f_2}{\partial s_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \frac{\partial f_n}{\partial s_2} & \frac{\partial f_n}{\partial s_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q} \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \vdots \\ \dot{s}_n \end{Bmatrix} = \mathbf{K}\dot{q} \quad \text{sendo} \quad \mathbf{K} = \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{Bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}$$

Aceleração

$$\mathbf{L} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{Bmatrix} = \frac{d}{dq}\mathbf{K} \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \\ \vdots \\ \ddot{s}_n \end{Bmatrix} = \ddot{q}\mathbf{K} + \dot{q}^2\mathbf{L}$$

## Cadeias Não Impostas

Obtenção dos F's e K's

$$\mathbf{F}_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q_i} \end{Bmatrix}, i = 1 \ldots m \;\; \text{e} \;\; \mathbf{K}_i = \begin{Bmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ \vdots \\ k_{in} \end{Bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}_i$$

Onde

$$k_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial q_j}$$

Velocidade e Aceleração

$$\dot{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{K}_i\dot{q}_i \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^{m}(\ddot{q}_i\mathbf{K}_i + \dot{q}_i^2\mathbf{L}_i)$$

Onde

$$\mathbf{L}_i = \frac{1}{\dot{q}_i}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial s_k}\dot{s}_k\right)$$

Específico - Cadeias com Dois Graus de Liberdade e Cinco Barras

$$\mathbf{L}_1 = \frac{1}{\dot{q}_1}\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial k_{11}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{11}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial k_{12}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{12}}{\partial q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{11}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{11}}{\partial s_2} \\ \frac{\partial k_{12}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{12}}{\partial s_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{L}_2 = \frac{1}{\dot{q}_2}\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial k_{21}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{21}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial k_{22}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{22}}{\partial q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{21}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{21}}{\partial s_2} \\ \frac{\partial k_{22}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{22}}{\partial s_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix}\right)$$

## Ponto Acoplador

Deslocamento

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_o \\ y_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Coeficiente de Velocidade

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_o + k_s \begin{bmatrix} -\sin s & -\cos s \\ \cos s & -\sin s \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Velocidade e Aceleração

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{Bmatrix} = \dot{q}\mathbf{K}_p \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{X}}_p = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \end{Bmatrix} = \ddot{q}\mathbf{K}_p + \dot{q}^2\mathbf{L}_p$$

Onde

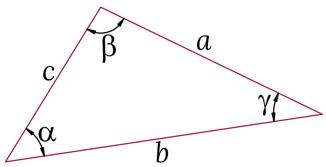
$$\mathbf{L}_p = \frac{d}{dq}\mathbf{K}_p$$

### Expressões Trigonométricas

Soma e subtração de arcos

$$\text{sen}\,(a \pm b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b \pm \text{sen}\,b \cdot \cos a$$
$$\cos\,(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$$

Lei dos senos




$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$$

Lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma$$

### Álgebra Matricial

Inversão de Matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Operações em bloco

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] \cdot \left\{\begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ \hline k_3 \\ k_4 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \hline f_3 \\ f_4 \end{array}\right\}$$

A B C K1 K2 F1 F2

$$\begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} k_3 \\ k_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} a_{31} \\ a_{41} \end{Bmatrix} \cdot k_1 - \begin{Bmatrix} a_{32} \\ a_{42} \end{Bmatrix} \cdot k_2\right)$$

# Gabarito

### Questão 1

Em função das coordenadas generalizadas $(y, \varphi, x)$, podemos obter as equações de restrição.

$$\begin{cases} y\cos\alpha + a\cos\varphi - x = 0 \\ y\,\mathrm{sen}\,\alpha - a\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Cujas derivadas parciais, em relação às coordenadas generalizadas irão nos fornecer

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha \end{Bmatrix} \\ \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} -a\,\mathrm{sen}\,\varphi & -1 \\ -a\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.2}$$

E então

$$\mathbf{J}^{-1} = -\frac{1}{a\cos\varphi}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a\cos\varphi & -a\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Trazendo, como consequência

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = \begin{Bmatrix} k_\varphi \\ k_x \end{Bmatrix} &= \frac{1}{a\cos\varphi}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a\cos\varphi & -a\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{a\cos\varphi}\begin{Bmatrix} \mathrm{sen}\,\alpha \\ a\cos(\alpha+\varphi) \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{1.4}$$

E, então

$$\begin{aligned} k_\varphi &= \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{a\cos\varphi} \\ k_x &= \frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\cos\varphi} \end{aligned} \tag{1.5}$$

No caso das acelerações, o vetor **L**, pode ser obtido por

$$\mathbf{L} = \begin{Bmatrix} \ell_\varphi \\ \ell_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial k_\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial k_x}{\partial y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial k_\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial k_x}{\partial \varphi} & \frac{\partial k_x}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_\varphi \\ k_x \end{Bmatrix} \tag{1.6}$$

Como aqui neste problema, só temos interesse na obtenção de $\ell_x$, vem

$$\mathbf{L} = \begin{Bmatrix} \cdots \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ -\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos^2\varphi} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_\varphi \\ k_x \end{Bmatrix} \tag{1.7}$$

Obtêm-se então

$$\ell_x = -\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{a\cos\varphi} = -\frac{\mathrm{sen}^2\,\alpha}{a\cos^3\varphi} \tag{1.8}$$

Desta forma, a aceleração solicitada será

$$\ddot{x} = k_x\ddot{y} + \dot{y}^2\ell_x = \frac{\cos(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}\ddot{y} - \dot{y}^2\frac{\mathrm{sen}^2\,\alpha}{a\cos^3\varphi} \tag{1.9}$$

E a expressão (1.9), quando consideramos $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$, se transforma em

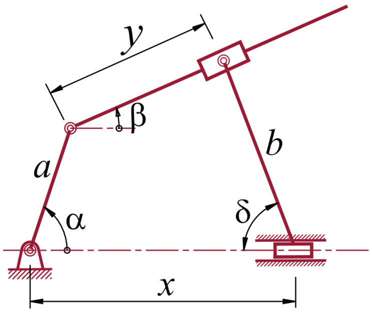
$$\ddot{x} = -\dot{y}^2\frac{2}{a} \tag{1.10}$$

Se consideramos ainda o valor 2 para o comprimento da barra $a$, teremos finalmente

$$\ddot{x} = -\dot{y}^2 \tag{1.11}$$

**Questão 2**

Se considerarmos a coordenada *y*, figura abaixo, como uma coordenada de apoio, podemos trabalhar com ela inicialmente, no sentido de obter uma única equação de restrição, vejamos então.




$$\begin{cases} a\cos\alpha + y\cos\beta + b\cos\delta - x = 0 \\ a\,\text{sen}\,\alpha + y\,\text{sen}\,\beta - b\,\text{sen}\,\delta \qquad = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Obtendo, na equação (2.1), os valores de $y \cdot \cos\beta$ e $y \cdot \text{sen}\,\beta$, podemos dividir um pelo outro, obtendo a equação abaixo.

$$x\,\text{sen}\,\beta - a\,\text{sen}\,\beta\cos\alpha - b\,\text{sen}\,\beta\cos\delta = b\cos\beta\,\text{sen}\,\delta - a\cos\beta\,\text{sen}\,\alpha \tag{2.2}$$

Onde, rearranjando os termos e atentando para as somas trigonométricas, obtemos a nossa equação de restrição única

$$a\,\text{sen}(\beta-\alpha) + b\,\text{sen}(\beta+\delta) - x\,\text{sen}\,\beta = 0 \tag{2.3}$$

E esta última equação fornece, de imediato o deslocamento da barra *b*

$$x = \frac{1}{\text{sen}\,\beta}\left[a\,\text{sen}(\beta-\alpha) + b\,\text{sen}(\beta+\delta)\right] \tag{2.4}$$

A partir da equação de restrição (2.3) é fácil se obter

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= -\text{sen}\,\beta \\ \mathbf{F}_\alpha &= -a\cos(\beta-\alpha) \\ \mathbf{F}_\beta &= a\cos(\beta-\alpha) + b\cos(\beta+\delta) - x\cos\beta \end{aligned} \tag{2.5}$$

Então, sendo $\mathbf{J}^{-1} = -1/\text{sen}\,\beta$, e teremos

$$k_{\alpha x} = -a\frac{\cos(\beta-\alpha)}{\text{sen}\,\beta} \tag{2.6}$$

$$k_{\beta x} = \frac{a\cos(\beta-\alpha)}{\text{sen}\,\beta} + \frac{b\cos(\beta+\delta)}{\text{sen}\,\beta} - \frac{x\cos(\beta)}{\text{sen}\,\beta} \tag{2.7}$$

Que nos permite obter a velocidade

$$\dot{x} = \frac{1}{\text{sen}\,\beta}\left\{\dot{\beta}\left[a\cos(\beta-\alpha) + b\cos(\beta+\delta) - x\cos(\beta)\right] - a\,\dot{\alpha}\cos(\beta-\alpha)\right\} \tag{2.8}$$

Para as acelerações, as expressões são

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\alpha &= \frac{1}{\dot{\alpha}}\left(\begin{bmatrix} \dfrac{\partial k_\alpha x}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial k_\alpha x}{\partial \beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} + \frac{\partial k_\alpha x}{\partial x}\dot{x}\right) \\ \mathbf{L}_\beta &= \frac{1}{\dot{\beta}}\left(\begin{bmatrix} \dfrac{\partial k_\beta x}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial k_\beta x}{\partial \beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} + \frac{\partial k_\beta x}{\partial x}\dot{x}\right) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Considerando as derivadas, não nulas, da primeira linha

$$\begin{aligned}\frac{\partial k_{\alpha x}}{\partial \alpha} &= -a\frac{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}{\operatorname{sen}\beta} \\ \frac{\partial k_{\alpha x}}{\partial \beta} &= a\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\beta}\end{aligned} \tag{2.10}$$

E também as derivadas da segunda linha

$$\begin{aligned}\frac{\partial k_{\beta x}}{\partial \alpha} &= a\frac{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}{\operatorname{sen}\beta} \\ \frac{\partial k_{\beta x}}{\partial \beta} &= \frac{a\cos\alpha + b\cos\delta - x}{\operatorname{sen}^2\beta} \\ \frac{\partial k_{\beta x}}{\partial x} &= -\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}\end{aligned} \tag{2.11}$$

Podemos montar as equações

$$\ell_{\alpha x} = \frac{a}{\operatorname{sen}\beta}\left[\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\dot{\beta}}{\dot{\alpha}} - \operatorname{sen}(\beta-\alpha)\right] \tag{2.12}$$

$$\ell_{\beta x} = \frac{a\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\beta}} + \frac{a\cos\alpha + b\cos\delta - x}{\operatorname{sen}^2\beta} - \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\dot{x}}{\dot{\beta}} \tag{2.13}$$

E, finalmente, a aceleração

$$\ddot{x} = k_{\alpha x}\ddot{\alpha} + k_{\beta x}\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2\ell_{\alpha x} + \dot{\beta}^2\ell_{\beta x} \tag{2.14}$$