



Aluno: _____

1. Para um sistema came seguidor radial deslocado com diagrama de elevação do tipo **E-R_s-R-R_i**, (Elevação, Repouso superior, Retorno e Repouso inferior) mostre, deduzindo as expressões nos trechos de repouso, que a tangente do ângulo de pressão, ao longo de um ciclo completo, pode ser dada por:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{f(\theta) + \sqrt{R_p^2 - \varepsilon^2}} \begin{cases} f'(\theta) - \varepsilon & \text{para } 0 \leq \theta < \beta_1 \\ f'(\theta) + \varepsilon & \text{para } \beta_1 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

2. Em um sistema came seguidor, se tem, como base, as curvas $f_e(\theta)$ e $f_r(\theta)$, para elevação e retorno respectivamente, sabendo-se que se trata de uma composição do tipo **E-R** e que $\beta_1 + \beta_2 = 2\pi$, determine os valores de β_1 e β_2 para que não haja jerk.

$$f_e(\theta) = \frac{h}{4} \left[3 - 2 \cos \frac{\pi}{\beta_1} \theta - \cos^2 \frac{\pi}{\beta_1} \theta \right]$$
$$f_r(\theta) = h \left[10 \left(\frac{\theta}{\beta_2} \right)^2 - 20 \left(\frac{\theta}{\beta_2} \right)^3 + 15 \left(\frac{\theta}{\beta_2} \right)^4 - 4 \left(\frac{\theta}{\beta_2} \right)^5 \right]$$

3. Considerando a aplicação das curvas, do problema anterior, a um came de mesa com altura de elevação igual a 6 mm, determine o comprimento da mesa e obtenha o raio da circunferência de base **R_o**, para que se tenha uma geometria do conjunto a menor possível.

OBS. Independentemente do resultado obtido no problema anterior, considere aqui, um ângulo de elevação na ordem de 150°, e atente ao fato de que a equação $1 - 6x + 9x^2 - 4x^3$ pode ser fatorada em $(1 - 4x) \cdot (x - 1) \cdot (x - 1)$.

Pesos:

A primeira questão tem peso 2, as demais têm peso 4.



Curvas de Elevação

Harmônica

$$f(\theta) = \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\beta} \theta \right)$$

Dupla Harmônica

$$f(\theta) = \frac{h}{2} \left[\left(1 - \cos \frac{\pi}{\beta} \theta \right) - \frac{1}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\beta} \theta \right) \right]$$

Cicloide

$$f(\theta) = h \left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\beta} \theta \right)$$

Polinômios - Lei de Formação

A-B

$$f(\theta) = h \left[b \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^a - a \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^b \right]$$

A-B-C

$$f(\theta) = h \left[\frac{bc}{2} \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^a - ac \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^b + \frac{ab}{2} \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^c \right]$$

A-B-C-D

$$f(\theta) = h \left[\frac{bcd}{6} \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^a - \frac{acd}{2} \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^b + \frac{abd}{2} \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^c - \frac{abc}{6} \left(\frac{\theta}{\beta} \right)^d \right]$$

Transformações Geometria/Tempo

$$\dot{y} = f'(\theta) \dot{\theta}$$

$$\ddot{y} = f''(\theta) \dot{\theta}^2$$

$$\ddot{\ddot{y}} = f'''(\theta) \dot{\theta}^3$$

Ângulos de Pressão

Expressão Geral

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f'(\theta)}{f(\theta) + R_p}$$

Ângulo Máximo

$$\operatorname{tg} \hat{\varphi} = \frac{f'(\theta_o)}{f(\theta_o) + R_p}$$

Engripamento do Seguidor

Ângulo limite

$$\operatorname{tg} \varphi_e = \frac{a}{\mu(a + 2b)}$$

Para não haver engripamento

$$\operatorname{tg} \hat{\varphi} < \frac{a}{\mu(a + 2b)}$$

$$b < \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \hat{\varphi}} - 1 \right)$$

Raio Primitivo

$$R_i = R_p + f(\theta_o)$$

Seguidores de Mesa

Contato Mesa/Came

$$e = f'(\theta)$$

$$\ell = 1, 1 (f'_{max}(\theta) + \|g'_{min}(\theta)\|)$$

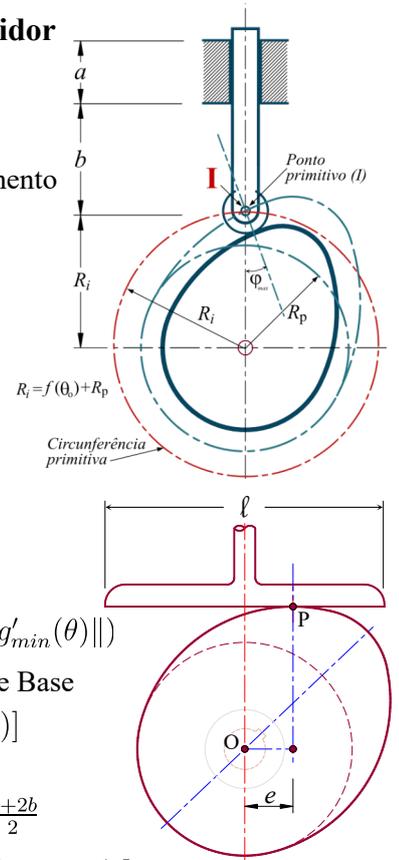
Raio da Circunferência de Base

$$R_o > -[f(\theta) + f''(\theta)]$$

Engripamento

$$f'_{max}(\theta) < \frac{a}{2\mu_m} + \mu_c \frac{a+2b}{2}$$

$$b > \frac{1}{\mu_c} \left[f'_{max}(\theta) - \frac{a}{2} \left(\mu_c + \frac{1}{\mu_m} \right) \right]$$



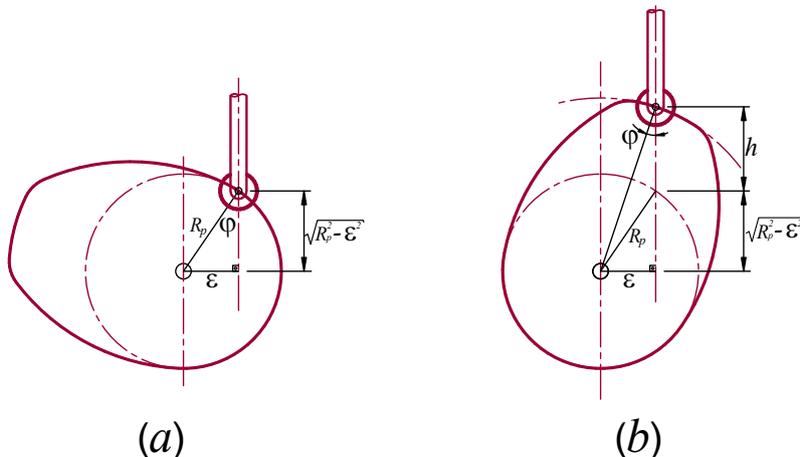
Curva	θ_o	K	$\frac{R_p}{h}$
Harmônica	$\frac{\beta}{\pi} \arccos \frac{1}{K}$	$\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right)^2}$	$\frac{K-1}{2}$
Cicloide	$\frac{\beta}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\pi}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}$	$\frac{2\pi}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}$	$\frac{1}{\pi} (K - \operatorname{arctg} K)$
Dupla Harmônica	$\frac{2\beta}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta}{\pi} (K-1) \operatorname{tg} \hat{\varphi} \right)$	$\sqrt{1 + 3 \left(\frac{\pi}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right)^2}$	$\frac{3(K-1)^2}{8K-4}$
Dupla Cicloide	$\frac{\beta}{2\pi} \arccos \left(1 - \frac{2}{K^2} \right)$	$\sqrt{1 + 16 \left(\frac{\pi}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right)^2}$	$\frac{1}{2\pi} \left[\frac{K^4 - 8K^2 - 18K^{-2} + 26}{3\sqrt{K^2 - 1}} - \arccos \left(1 - \frac{2}{K^2} \right) \right]$
Polinômio 3-4-5	$\frac{\beta}{2} (1+K)$	$\frac{4}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} + \sqrt{1 + \left(\frac{4}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right)^2}$	$\frac{(K+1)^3 (3K^3 - 9K^2 + 13K - 15)}{4K}$
Polinômio 4-5-6	$\frac{\beta}{2} (1+K)$	$\frac{5}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} + \sqrt{1 + \left(\frac{5}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right)^2} - \frac{2}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}$	$\frac{(K+1)^4 (5K^3 - 15K^2 + 21K - 19)}{32(K-1)}$
Polinômio 3-4-5-6	$\frac{\beta}{2} (1+K)$	$\frac{5}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} - \sqrt{1 + \left(\frac{5}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right)^2} + \frac{2}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}}$	$\frac{(K+1)^3 (5K^4 - 20K^3 + 36K^2 - 48K + 51)}{32(5K+1)}$
Polinômio 4-5-6-7	$\frac{\beta}{2} (1+K)$	$\frac{6}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \sqrt{1 + \left(\frac{6}{\beta \operatorname{tg} \hat{\varphi}} \right)^2}$	$\frac{(K+1)^4 (5K^4 - 20K^3 + 36K^2 - 44K + 35)}{192K}$



Gabarito

Questão 1

Na figura abaixo, vemos as situações de repouso inferior em (a) e repouso superior em (b), respectivamente.



E, pela figura, podemos ver claramente que em (a)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R_p^2 - \varepsilon^2}} \tag{1.1}$$

e em (b)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varepsilon}{h + \sqrt{R_p^2 - \varepsilon^2}} \tag{1.2}$$

Visto que, na situação de repouso inferior $f(\theta) = 0$ e $f'(\theta) = 0$, a equação (1.1) pode ser reescrita na forma

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f'(\theta) + \varepsilon}{f(\theta) + \sqrt{R_p^2 - \varepsilon^2}} \tag{1.3}$$

E, para o repouso superior se tem $f(\theta) = h$ e $f'(\theta) = 0$, então, (1.2) também pode ser reescrita

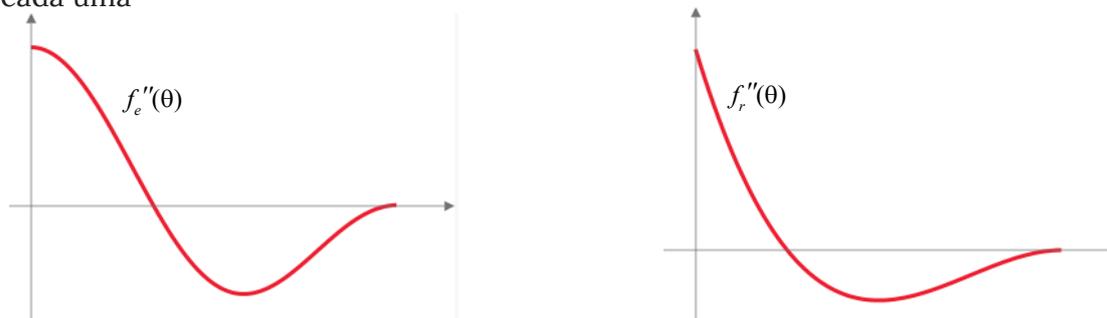
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f'(\theta) + \varepsilon}{f(\theta) + \sqrt{R_p^2 - \varepsilon^2}} \tag{1.4}$$

Questão 2

Obtendo-se as derivadas, simultaneamente para as funções dadas

$$\begin{aligned} f_e(\theta) &= \frac{h}{4} \left[3 - 2 \cos \frac{\pi}{\beta_1} \theta - \cos^2 \frac{\pi}{\beta_1} \theta \right] & f_r(\theta) &= h \left[10 \left(\frac{\theta}{\beta_2} \right)^2 - 20 \left(\frac{\theta}{\beta_2} \right)^3 + 15 \left(\frac{\theta}{\beta_2} \right)^4 - 4 \left(\frac{\theta}{\beta_2} \right)^5 \right] \\ f_e'(\theta) &= \frac{h\pi}{2\beta_1} \left[\operatorname{sen} \frac{\pi}{\beta_1} \theta + \cos \frac{\pi}{\beta_1} \theta \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{\beta_1} \theta \right] & f_r'(\theta) &= \frac{20h}{\beta_2} \left[\frac{\theta}{\beta_2} - 3 \left(\frac{\theta}{\beta_2} \right)^2 + 3 \left(\frac{\theta}{\beta_2} \right)^3 - \left(\frac{\theta}{\beta_2} \right)^4 \right] \\ f_e''(\theta) &= \frac{h\pi^2}{2\beta_1^2} \left[\cos \frac{\pi}{\beta_1} \theta - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\beta_1} \theta + \cos^2 \frac{\pi}{\beta_1} \theta \right] & f_r''(\theta) &= \frac{20h}{\beta_2^2} \left[1 - 6 \frac{\theta}{\beta_2} + 9 \left(\frac{\theta}{\beta_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{\theta}{\beta_2} \right)^3 \right] \end{aligned}$$

Verificando as acelerações nos pontos de início e final de cada função, podemos esboçar um gráfico inicial para cada uma



Como sabemos que, ao final, o gráfico real de $f_r''(\theta)$ deverá ser espelhado e que o diagrama será do tipo E-R, então os valores no início de cada aceleração têm que ser iguais para que não haja salto na função total da aceleração.

$$f_e''(0) = f_r''(0) \quad (2.1)$$

Ou seja

$$\frac{h\pi^2}{2\beta_1^2} [1 - 0 + 1] = \frac{20h}{\beta_2^2} [1 - 0 + 0 - 0] \quad (2.2)$$

Que nos leva a

$$\frac{\pi^2}{\beta_1^2} = \frac{20}{\beta_2^2} \quad (2.3)$$

E, considerando que implicitamente foi dado que $\beta_1 + \beta_2 = 2\pi$, vamos obter

$$\beta_1 = \frac{2\pi^2\sqrt{5}}{10 + \pi\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \beta_2 = \frac{20\pi}{10 + \pi\sqrt{5}} \quad (2.4)$$

Em valores numéricos

$$\beta_1 = 148,5^\circ \quad \text{e} \quad \beta_2 = 211,5^\circ \quad (2.5)$$

Questão 3

A partir das expressões obtidas no problema 2, podemos obter as velocidades máximas, igualando as acelerações a zero, então, para a elevação, igualando a aceleração a zero, vai nos restar

$$\cos \frac{\pi}{\beta_1} - \sin^2 \frac{\pi}{\beta_1} + \cos^2 \frac{\pi}{\beta_1} = 0 \quad (3.1)$$

Que, após as transformações trigonométricas fica

$$2 \cos^2 \frac{\pi}{\beta_1} + \cos \frac{\pi}{\beta_1} - 1 = 0 \quad (3.2)$$

Esta é uma equação do segundo grau em cosseno de fácil solução, nos provendo

$$\theta_{o1} = \frac{\beta_1}{3} = \frac{5\pi}{18} = 0,87 \text{ rad} \quad (3.3)$$

Que será o ângulo crítico onde a velocidade será máxima na elevação. Para o retorno, se igualarmos a aceleração a zero e simplificarmos, vamos obter

$$1 - 6\frac{\theta}{\beta_2} + 9\left(\frac{\theta}{\beta_2}\right)^2 - 4\left(\frac{\theta}{\beta_2}\right)^3 = 0 \quad (3.4)$$

Sendo esta uma equação do terceiro grau que podemos fatorar em

$$\left(1 - 4\frac{\theta}{\beta_2}\right) \cdot \left(\frac{\theta}{\beta_2} - 1\right)^2 = 0 \quad (3.5)$$

Facilitando a forma de achar as raízes que, aqui, só vai nos interessar o primeiro termo, que nos fornecerá

$$\theta_{o2} = \frac{\beta_2}{4} = \frac{7\pi}{24} = 0,92 \text{ rad} \quad (3.6)$$

Aplicando estes ângulos críticos nas funções de velocidade, podemos obter o comprimento da mesa

$$L = 1,1 \left[f_e' \left(\frac{5}{6} \right) + f_r' \left(\frac{7\pi}{24} \right) \right] = 8,93 \text{ mm} \quad (3.7)$$



No cálculo de R_o , vamos partir das acelerações segunda na elevação e retorno, para obter os pontos de mínimo de cada aceleração.

$$f_e'''(\theta) = -\frac{h\pi^3}{2\beta_1^3} \left(1 + 4 \cos \frac{\pi}{\beta_1} \theta\right) \cdot \text{sen} \frac{\pi}{\beta_1} \theta \quad \text{e} \quad f_r'''(\theta) = \frac{120h}{\beta_2^3} \left[-1 + 3\frac{\theta}{\beta_2} - 2\left(\frac{\theta}{\beta_2}\right)^2\right] \quad (3.8)$$

Que quando igualadas a zero, nos permite chegar nas expressões

$$1 + 4 \cos \frac{\pi}{\beta_1} \theta = 0 \quad \text{e} \quad -1 + 3\frac{\theta}{\beta_2} - 2\left(\frac{\theta}{\beta_2}\right)^2 = 0 \quad (3.9)$$

Da primeiro equação, vamos obter

$$\theta_{o1} = \frac{\beta_1}{\pi} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{6} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) = 1,52 \text{ rad} \quad (3.10)$$

Para a segunda, temos duas opções

$$\frac{\theta_{o2}}{\beta_2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\theta_{o2}}{\beta_2} = \frac{1}{2} \quad (3.11)$$

Mas, é visível que somente nos interessa a última, pelo que a primeira apenas nos indica que a curva de aceleração assintota o eixo horizontal no seu final. Assim, ficamos com

$$\theta_{o2} = \frac{\beta_2}{2} = \frac{7\pi}{12} = 1,83 \text{ deg} \quad (3.12)$$

Aplicando estes valores críticos na elevação e na aceleração para as duas curvas, se tem

$$\begin{aligned} R_{o1} &> -[f_e(\theta_{o1}) + f_e''(\theta_{o1})] = -0,30 \\ R_{o2} &> -[f_r(\theta_{o2}) + f_r''(\theta_{o2})] = -2,64 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Utilizando a recomendação feito no curso, vamos obter finalmente.

$$R_o = \max\left(R_{o1}, R_{o2}, \frac{2}{3}h\right) = \max(-0,30, -2,64, 4) = 4 \text{ mm} \quad (3.14)$$

