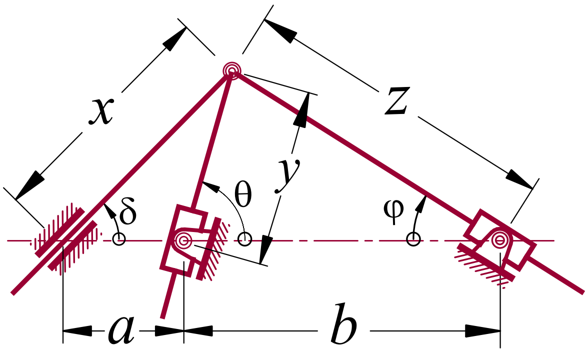
Mecanismos - 1ª Avaliação

19/12/2024

Nota:

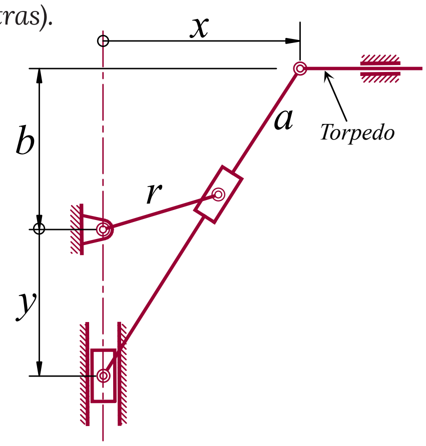
Aluno: ______________________________

1. Para o mecanismo, de seis barras, da figura, considere (θ, y, x, φ, z) para coordenadas generalizadas. Determine o deslocamento, velocidade e aceleração para a barra que desliza, segundo o ângulo δ constante (coordenada x).



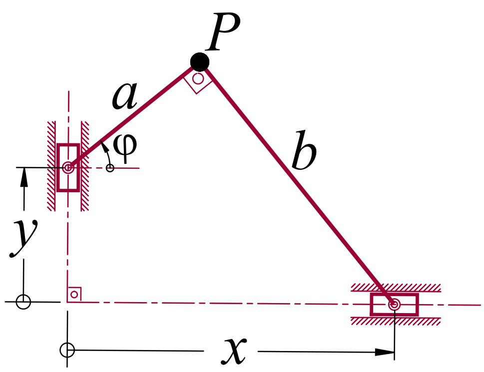
2. No mecanismo de plaina Stefhenson, o comprimento da barra a é constante e vai de par rotativo a par rotativo, também são constantes b e r. Determine o deslocamento, velocidade e aceleração do torpedo, considerando (y, x) para coordenadas generalizadas..

   OBS.
   No desenvolvimento, deve conter apenas expressões envolvendo as coordenadas generalizadas (não devem ser criadas ou utilizadas coordenadas extras).



3. O mecanismo mostrado, onde a e b, a 90°, são uma única barra, tem o sistema (y, x) para coordenadas generalizadas. Determine o deslocamento, velocidade e aceleração para o ponto **P** do acoplador. Perceba, no entanto, que a variável φ não faz parte do sistema de coordenadas generalizadas e não deve constar nas expressões finais.

   OBS.
   Neste problema, em função de x e y, o valor de sen φ é $\frac{bx-ay}{a^2+b^2}$. Encontre valor do cos φ e prossiga no desenvolvimento da questão.



Pesos:
O aluno deve escolher uma questão, colocando um X na mesma, que terá peso 4, caso não o faça, será considerado 3, 3 e 4 na sequência.

Cadeias Impostas

Deslocamento

$$\begin{cases} f_1(q, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) = 0 \\ f_2(q, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ f_n(q, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n) = 0 \end{cases}$$

Velocidade

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \frac{\partial f_1}{\partial s_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \frac{\partial f_2}{\partial s_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial s_1} & \frac{\partial f_n}{\partial s_2} & \frac{\partial f_n}{\partial s_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_n} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q} \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \vdots \\ \dot{s}_n \end{Bmatrix} = \mathbf{K}\dot{q} \ \text{ sendo } \ \mathbf{K} = \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{Bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}$$

Aceleração

$$\mathbf{L} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{Bmatrix} = \frac{d}{dq}\mathbf{K} \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \\ \vdots \\ \ddot{s}_n \end{Bmatrix} = \ddot{q}\mathbf{K} + \dot{q}^2\mathbf{L}$$

Cadeias Não Impostas

Obtenção dos F's e K's

$$\mathbf{F}_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q_i} \end{Bmatrix}, i = 1 \ldots m \ \text{ e } \ \mathbf{K}_i = \begin{Bmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ \vdots \\ k_{in} \end{Bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{F}_i$$

Onde

$$k_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial q_j}$$

Velocidade e Aceleração

$$\dot{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{K}_i \dot{q}_i \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^{m} (\ddot{q}_i\mathbf{K}_i + \dot{q}_i^2\mathbf{L}_i)$$

Onde

$$\mathbf{L}_i = \frac{1}{\dot{q}_i}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial s_k}\dot{s}_k\right)$$

Específico - Cadeias com Dois Graus de Liberdade e Cinco Barras

$$\mathbf{L}_1 = \frac{1}{\dot{q}_1}\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial k_{11}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{11}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial k_{12}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{12}}{\partial q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{11}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{11}}{\partial s_2} \\ \frac{\partial k_{12}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{12}}{\partial s_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{L}_2 = \frac{1}{\dot{q}_2}\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial k_{21}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{21}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial k_{22}}{\partial q_1} & \frac{\partial k_{22}}{\partial q_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial k_{21}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{21}}{\partial s_2} \\ \frac{\partial k_{22}}{\partial s_1} & \frac{\partial k_{22}}{\partial s_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{Bmatrix}\right)$$

Ponto Acoplador

Deslocamento

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_o \\ y_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Coeficiente de Velocidade

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_o + k_s \begin{bmatrix} -\sin s & -\cos s \\ \cos s & -\sin s \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Velocidade e Aceleração

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{Bmatrix} = \dot{q}\mathbf{K}_p \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{X}}_p = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \end{Bmatrix} = \ddot{q}\mathbf{K}_p + \dot{q}^2\mathbf{L}_p$$

Onde

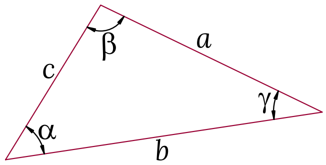
$$\mathbf{L}_p = \frac{d}{dq}\mathbf{K}_p$$

Expressões Trigonométricas

Soma e subtração de arcos

$$\text{sen}\,(a \pm b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b \pm \text{sen}\, b \cdot \cos a$$
$$\cos\,(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$$

Lei dos senos



$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$$

Lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma$$

Álgebra Matricial

Inversão de Matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Operações em bloco

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} k_3 \\ k_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} a_{31} \\ a_{41} \end{Bmatrix} \cdot k_1 - \begin{Bmatrix} a_{32} \\ a_{42} \end{Bmatrix} \cdot k_2\right)$$

Gabarito

Questão 1

Em função das coordenadas generalizadas (θ, y, x, φ, z), podemos obter as equações de restrição.

$$\begin{cases} x\cos\delta - y\cos\theta - a = 0 \\ x\,\text{sen}\,\delta - y\,\text{sen}\,\theta \quad\;\; = 0 \\ y\cos\theta + z\cos\varphi - b = 0 \\ y\,\text{sen}\,\theta - z\,\text{sen}\,\varphi \quad\;\; = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Isolando, no sistema, os termos que contém y nas duas primeiras linhas e dividindo vamos eliminar y e obter:

$$x = a\frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,(\theta-\delta)} \tag{1.2}$$

A partir da eq. 1.1, as matrizes **J** e **F** podem ser obtidas

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \cos\delta & 0 & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & \text{sen}\,\delta & 0 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -z\,\text{sen}\,\varphi & \cos\varphi \\ \text{sen}\,\theta & 0 & -z\,\cos\varphi & -\text{sen}\,\varphi \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} y\,\text{sen}\,\theta \\ -y\cos\theta \\ -y\,\text{sen}\,\theta \\ y\cos\theta \end{Bmatrix} \tag{1.4}$$

Separando, por blocos (1.3) e (1.4) podemos montar o sistema algébrico

$$\begin{bmatrix} -\cos\theta & \cos\delta \\ -\text{sen}\,\theta & \text{sen}\,\delta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_y \\ k_x \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} y\,\text{sen}\,\theta \\ -y\cos\theta \end{Bmatrix} \tag{1.5}$$

Que, após a inversão da matriz 2x2, pode ser colocado sob a forma

$$\begin{Bmatrix} k_y \\ k_x \end{Bmatrix} = -\frac{y}{\text{sen}\,(\theta-\delta)} \begin{bmatrix} \text{sen}\,\delta & -\cos\delta \\ \text{sen}\,\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \text{sen}\,\theta \\ -\cos\theta \end{Bmatrix} \tag{1.6}$$

Fornecendo, como resultados

$$\begin{aligned} k_y &= -\frac{y\cos(\theta-\delta)}{\text{sen}\,(\theta-\delta)} \\ k_x &= -\frac{y}{\text{sen}\,(\theta-\delta)} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Partindo-se do fato que a velocidade da coordenada x pode ser dada por $k_x\dot{\theta}$, teremos

$$\dot{x} = -\dot{\theta}\frac{y}{\text{sen}\,(\theta-\delta)} \tag{1.8}$$

O coeficiente da aceleração, para x, será obtido por $\ell_x = \frac{\partial k_x}{\partial\theta} + \frac{\partial k_x}{\partial y}k_y + \frac{\partial k_x}{\partial x}k_x + \frac{\partial k_x}{\partial\varphi}k_\varphi + \frac{\partial k_x}{\partial z}k_z$, e então

$$\ell_x = \frac{y\cos(\theta-\delta)}{\text{sen}^2(\theta-\delta)} - \frac{1}{\text{sen}\,(\theta-\delta)}k_y \tag{1.9}$$

Conhecidos, então os coeficientes de velocidade e aceleração para a variável x, podemos escrever

$$\ddot{x} = k_x\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2\ell_x \tag{1.10}$$

Questão 2

Em função das coordenadas generalizadas (y, x), e notando que $a^2 = x^2 + (b+y)^2$, podemos obter a equação de restrição.

$$x^2 + (b+y)^2 - a^2 = 0 \tag{2.1}$$

Com o consequente valor de x

$$x = \pm\sqrt{a^2 - (b+y)^2} \tag{2.2}$$

Pela equação de restrição (2.1) se tem

$$\mathbf{J} = 2x \qquad \text{e} \qquad \mathbf{F} = 2(b+y) \tag{2.3}$$

Desta forma, o k_x será

$$k_x = -\frac{b+y}{x} \tag{2.4}$$

Sendo assim, teremos, para velocidade

$$\dot{x} = -\dot{y}\frac{b+y}{x} \tag{2.5}$$

Sabemos que $\ell_x = \frac{\partial k_x}{\partial y} + \frac{\partial k_x}{\partial x}k_x$, então

$$\ell_x = -\frac{1}{x} + \frac{b+y}{x^2}k_x \tag{2.6}$$

Conhecidos, então os coeficientes de velocidade e aceleração para a variável x, podemos escrever

$$\ddot{x} = k_x\ddot{y} + \dot{y}^2\ell_x \tag{2.7}$$

Questão 3

A obtenção do cosseno pode ser feita atentando-se ao fato de que o ângulo formado por x e b é $\frac{\pi}{2} - \varphi$, então

$$\begin{matrix} a\cos\varphi + b\,\mathrm{sen}\,\varphi = x \\ y + a\,\mathrm{sen}\,\varphi = b\cos\varphi \end{matrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{matrix} b\,\mathrm{sen}\,\varphi = x - a\cos\varphi \\ a\,\mathrm{sen}\,\varphi = b\cos\varphi - y \end{matrix} \quad\Longrightarrow\quad \frac{b}{a} = \frac{x - a\cos\varphi}{b\cos\varphi - y} \tag{3.1}$$

E, rearranjando (3.1)

$$\begin{aligned} b^2\cos\varphi - by &= ax - a^2\cos\varphi \\ (a^2+b^2)\cos\varphi &= ax + by \end{aligned} \tag{3.2}$$

De onde se é possível obter

$$\cos\varphi = \frac{ax+by}{a^2+b^2} \tag{3.3}$$

Pela figura, é fácil encontrar a equação de restrição

$$x^2 + y^2 - (a^2+b^2) = 0 \quad\Rightarrow\quad x = \sqrt{a^2+b^2-y^2} \tag{3.4}$$

Como consequência

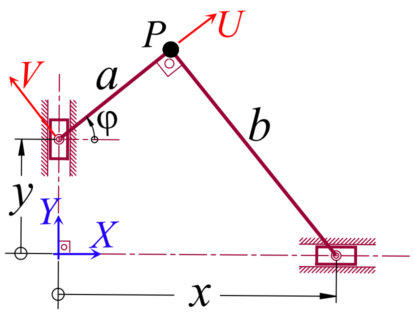
$$\mathbf{J} = 2x \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = 2y \quad\Rightarrow\quad \dot{x} = -\dot{y}\frac{y}{x} \tag{3.5}$$

E, a partir da equação (3.5)

$$\ell_x = \frac{\partial k_x}{\partial y} + \frac{\partial k_x}{\partial x}k_x = -\frac{1}{x} + \frac{y}{x^2} \tag{3.6}$$

Desta forma, podemos considerar obtidos o deslocamento, velocidade e aceleração para a coordenada x.

Considerando agora a figura abaixo que mostra os pontos escolhidos para os sistemas local e global, vamos obter a equação (3.7).



$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\mathrm{sen}\,\varphi \\ \mathrm{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.7}$$

Ou, mais especificamente

$$\begin{cases} x_p = a\cos\varphi \\ y_p = y + a\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases} \tag{3.8}$$

Agora substituindo-se os valores de seno e cosseno encontrados, chegamos ao deslocamento.

$$\begin{cases} x_p = a\frac{ax+by}{a^2+b^2} \\ y_p = y + a\frac{bx-ay}{a^2+b^2} \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} x_p = a\frac{ax+by}{a^2+b^2} \\ y_p = b\frac{ax+by}{a^2+b^2} \end{cases} \tag{3.9}$$

E então, para a velocidade, derivando no tempo obtemos

$$\begin{cases} \dot{x}_p = a\frac{a\dot{x}+b\dot{y}}{a^2+b^2} \\ \dot{y}_p = b\frac{a\dot{x}+b\dot{y}}{a^2+b^2} \end{cases} \tag{3.10}$$

Mais uma vez, derivando no tempo, vamos obter para a aceleração

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = a\frac{a\ddot{x}+b\ddot{y}}{a^2+b^2} \\ \ddot{y}_p = b\frac{a\ddot{x}+b\ddot{y}}{a^2+b^2} \end{cases} \tag{3.11}$$